

Univerza v Ljubljani
Fakulteta za elektrotehniko

Luka Teslić

**LOKALIZACIJA MOBILNEGA ROBOTA NA OSNOVI
OCENJENIH DALJIC IZ OKOLJA Z UPORABO
RAZŠIRJENEGA KALMANOVEGA FILTRA**

DOKTORSKA DISERTACIJA

Mentor: prof. dr. Igor Škrjanc

Ljubljana, 2011

Zahvala

Zahvaljujem se mentorju prof. dr. Igorju Škrjancu, univ. dipl. inž. el., in delovnemu mentorju doc. dr. Gregorju Klančarju, univ. dipl. inž. el., za izkazano pomoč pri izdelavi doktorske naloge. Mentorju se zahvaljujem za usmerjanje tekom podiplomskega študija ter koristne napotke v procesu objavljanja znanstvenih člankov. Enaka zahvala gre tudi delovnemu mentorju, ki pa se mu zahvaljujem tudi za pomoč pri programiranju v programskem jeziku c++ ter za pomoč pri zajemanju podatkov iz senzorjev na mobilnem robotu. Tekom podiplomskega študija sem prejel marsikatero koristno smernico tudi s strani izr. prof. dr. Saša Blažiča, univ. dipl. inž. el.. Sodelavcu Matevžu Bošnjaku, univ. dipl. inž. el., se zahvaljujem za pomoč oziroma diskusijo o možnostih ter smiselnosti uporabe žiroskopa, pospeškometra ali kamere za namen lokalizacije mobilnega robota.

Zahvaljujem se tudi staršem ter Darji, ki so me podpirali pri izdelavi doktorske naloge.

Luka Teslić

Povzetek

V doktorski nalogi so osredotočamo na reševanje problema lokalizacije mobilnega robota. Lokalizacija je temeljni problem, ki ga je potrebno rešiti v mobilni robotiki. Zunaj stavb se robot lahko dokaj natančno lokalizira z uporabo GPS senzorja, vendar ta rešitev znotraj stavb ne pride v poštev. Zato se mora robot znotraj stavb zanesti na svoje lastne senzorje. Robot se tako lahko lokalizira s pomočjo odometrije oziroma uporabo senzorjev, kot so inkrementalni merilniki zasuka koles (enkoder), pospeškometer, žiroskop in kompas. Vendar pa je lokalizacija samo z odometrijo netočna, saj se napaka, ki izvira iz merilnega šuma odometrijskega senzorja ter negotovosti odometrijskega modela, s časom akumulira. Oceno lege robota v prostoru se lahko izboljša z uporabo zemljevida okolja. Tako se robot v prvem koraku lokalizira z odometrijo, v drugem koraku pa tako, da trenutni zemljevid okolja primerja z že zgrajenim globalnim zemljevidom okolja. Trenutni zemljevid okolja je zgrajen iz podatkov senzorja, ki v danem trenutku posname okolje. Za ta namen so na mobilnem robotu pogosto uporabljeni senzori razdalje (ultrazvočni senzor ali laserski senzor razdalj) ali kamera. Pri takem načinu lokalizacije gre torej za integracijo informacije dveh različnih senzorjev, odometrskoga in senzorja, ki podaja informacijo iz okolja. V kolikor globalni zemljevid okolja ni podan vnaprej, mora robot rešiti kompleksen problem sočasne gradnje lokalizacije in gradnje zemljevida okolja, ki je poznan kot problem SLAM (Simultaneous Localization And Mapping). Za rešitev problema SLAM je najbolj pogosto uporabljena metoda razširjen Kalmanov filter (Extended Kalman Filter-EKF). EKF-SLAM je poznan kot računsko kompleksen problem in za zmanjšanje računske zahtevnosti je bilo razvitih veliko pristopov. Uporaba Kalmanovega filtra za nelinearne sisteme zahteva, da se nelinearne relacije linearizira. Zato smo povzeli lastnosti linearizacije, poleg tega pa smo orisali transformacijo Unscented Transform (UT), ki poskuša omiliti slabosti linearizacije. Za rešitev problema lokalizacije ter problema SLAM se poleg Kalmanovega filtra pogosto uporablja tudi filter delcev. V uvodnem delu disertacije smo zato

nakazali rešitev problema lokalizacije z uporabo filtra delcev. V našem delu smo algoritem za lokalizacijo implementirali na mobilnem robotu Pioneer 3-AT, ki zavija z zdrsavanjem koles tako, da levi par koles vrti v drugo smer kot desni par koles. Kot odometrski senzor smo uporabili dva enkoderja na kolesih, za snemanje okolja v horizontalni ravnini pa laserski senzor razdalj (LRF). Izhod sensorja LRF so meritve razdalj do objektov v prostoru pri kotih laserskih žarkov 0° do 180° . Ker je v notranjosti stavb ponavadi veliko ravnih segmentov oziroma sten, je zemljevid okolja predstavljen z daljicami. Daljica je opisana z robnimi točkami ter parametroma normalne enačbe premice. Za rešitev problema lokalizacije smo uporabili razširjen Kalmanov filter. Konvergenčne lastnosti EKF-a in posledično algoritma za lokalizacijo so odvisne od nastavitve vhodne ter izhodne kovariančne matrike procesa. Predikcijski del EKF-a je izveden s simulacijo simetričnega kinematičnega modela gibanja robota. V vhodni kovariančni matriki EKF-a sta standardni deviaciji kotne hitrosti levega ter desnega para koles definirani, kot da sta proporcionalni kotni hitrosti pripadajočega para koles. Podali smo predlog za eksperimentalno oceno parametra vhodne kovariančne matrike EKF-a. Tako ocenjena kovariančna matrika predikcijskega dela EKF-a zajema negotovosti zaradi napak pri modeliranju gibanja robota oziroma negotovosti zaradi netočno ocenjenih parametrov kinematičnega modela. Stremeli smo k iskanju konzervativne ocene kovariančne matrike ter tako poskušali povečati stabilnost EKF-a. Predikcijska ocena lege robota je v korekcijskem delu EKF-a izboljšana z minimizacijo razlik med parametri daljic iz trenutnega zemljevida okolja ter parametri daljic iz globalnega zemljevida, ki so pretvorjeni glede na koordinate robota. Globalen zemljevid okolja je zgrajen pred procesom lokalizacije in je podan vnaprej. Robot med gibanjem po prostoru iz odbojnih točk vsakega trenutnega posnetka okolja z LRF-om zgradi lokalni zemljevid okolja. Najprej so vse zaporedne točke pri katerih je prišlo do odboja laserskega žarka združene v množice, preostale točke pa so zavržene. Vsaka množica točk je potem razdeljena v več množic točk, če je razdalja med dvema zaporednima točkama večja od praga. Če je v neki množici manj kot določeno število točk, je množica zavržena. Vsaka množica točk je nato z algoritmom razdeli-in-zlij razdeljena v več zaporednih množic, kjer vsaka množica točk ustreza določeni daljici oziroma ravnemu segmentu v okolju. Če je v neki množici točk manj kot določeno število točk, je le ta zavržena. Neka množica točk je prav tako zavržena, če je dolžina pripadajoče daljice manjša od

vrednosti praga. Parametri premice so izračunani po metodi navadnih najmanjših kvadratov (LSQ). Kovariance parametrov premic, ki izhajajo iz napak pri merjenju razdalj ter kotov laserskih žarkov, sestavljajo izhodno kovariančno matriko EKF-a. V doktorski disertaciji smo predlagali metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov normalne enačbe premice, ki izhaja iz navadnih LSQ. Predlagano metodo smo nato v smislu računske zahtevnosti ter točnosti primerjali z metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov premic, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ. S primerjavo smo pokazali, da je predlagana metoda, ki izhaja iz navadnih LSQ računsko manj zahtevna. Točnost obeh metod smo analizirali z velikim številom ponovitev poskusov ocenjevanja kovarianc parametrov premic, pri tem pa smo uporabili simulirane meritve laserskega senzorja razdalj. Točnost predlagane metode, ki izhaja iz navadnih LSQ, je odvisna od števila točk iz katerih so izračunani parametri premice. Točnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ, pa je odvisna od točnosti ocen varianc izmerjenih razdalj ter kotov laserskih žarkov. Za izvršitev korekcijskega dela EKF-a je potrebno poiskati pare daljic iz globalnega in lokalnega zemljevida, ki pripadajo istim segmentom v okolju (npr., stena). Dve daljici sta definirani kot skladen par, če je stopnja prileganja med daljicama iz lokalnega ter globalnega zemljevida, ki sta izbrani za najbolj podobni, manjša od vrednosti pragov. Meritve razdalj ter kotov so izvršene LRF-om in so pri zmernih hitrostih gibanja robota zaradi končne hitrosti vrtenja zrcala senzorja malo popačene. Meritve LRF-a se uporabijo v korekcijskem delu EKF-a. Pri izpeljavi EKF-a je predpostavljeno, da šuma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a nista korelirana. V kolikor bi meritve LRF-a popravili z uporabo istega kinematičnega modela gibanja robota, kot je uporabljen v predikcijskem delu EKF-a, bi povzročili korelacijo med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a. Popačene meritve LRF-a lahko v okviru EKF-a upoštevamo z večanjem ocen varianc razdalj in kotov laserskih žarkov ter uporabo ortogonalnih LSQ za ocenjevanje parametrov premic ter njihovih kovarianc. Izvedli smo eksperiment lokalizacije mobilnega robota Pioneer 3-AT v strukturiranem okolju znotraj stavbe. Pri tem smo lego robota ocenjeno z EKF-om primerjali z lego robota, ki je ocenjena z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. Eksperimentalni rezultati kažejo na primernost nastavitve vhodne kovariančne matrike EKF-a in nakazujejo na uporabnost predlagane metode za ocenjevanje kovarianc parametrov premic za namen lokalizacije mobilnega robota s pomočjo EKF-a. Na-

mesto simetričnega kinematičnega modela gibanja robota lahko v predikcijskem delu EKF-a uporabimo tudi asimetrični kinematični model. Optimalne vrednosti nekaterih parametrov asimetričnega modela gibanja so odvisne od podlage, po kateri se pelje robot, razporeditve mase robota ter dinamike gibanja robota. Podali smo predlog za sprotno ocenjevanje izbranih dveh parametrov asimetričnega kinematičnega modela gibanja robota, ki naj se ocenjujeta s pomočjo EKF-a kot dodatni spremenljivki stanja. Na osnovi načrtanega algoritma za lokalizacijo mobilnega robota Pioneer 3-AT smo nakazali tudi rešitev problema SLAM. Prikazali smo strategijo za iskanje parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja, ki temelji na stopnjah prileganja med lokalno in globalno daljico ter na Mahalanobisovi razdalji med lokalno ter globalno premico. Ko v EKF-SLAM algoritmu dve skladni premici iz globalnega zemljevida združimo v eno premico, se na ta način spremeni korekcijska ocena stanja. Zato smo za ta primer podali izpeljavo za določitev novih vrednosti kovariančne matrike korekcije.

Abstract

In a doctoral thesis we focus on solving the problem of a mobile robot localization, which is a fundamental task to be solved in mobile robotics. In outdoor environments the robot can localize itself quite accurately by using GPS sensor, but this solution is not available indoors. For this reason the robot must rely on its own sensors in indoor environments. The robot can localize itself by odometry or using the sensors such as encoders, accelerometer, gyroscope and compass. But localizing the mobile robot only by the odometry is inaccurate, since the error, which arise out of the measurement noise of the odometric sensor and from the uncertainties of the odometric model, is over time accumulating. Estimated pose of the robot can be improved by applying the map of the environment. In the first step the robot then localizes itself by the odometry and in the second step by comparing the current environment map with the already built global environment map. The current environment map is built from the output data of a sensor, which in certain moments scans the environment. For this purpose the often used sensors on a mobile robot are range sensors (ultrasound sensor or laser range finder) or a camera. This localization approach is therefore actually the integration of the information from two different sensors, the odometric sensor and sensor that provide information from the environment. If the global map of the environment is not known a-priori, the robot must solve the Simultaneous Localization And Mapping (SLAM) problem. To solve the complex SLAM problem the most often used method is Extended Kalman Filter (EKF). EKF-SLAM is known as computational demanding problem and to reduce the computational complexity many approaches have been developed. Using the Kalman filter for nonlinear systems requires the linearization of the nonlinear relations. For this reason we have summarized the properties of the linearization and in addition we have outlined the Unscented Transform (UT), which attempts to mitigate the disadvantages of the linearization. To solve the localization or SLAM problem besides the Kalman filter the particle filter is also often used. In the introduc-

tion of the doctoral thesis we have therefore briefly summarize the solution of the localization problem by using the particle filter. In the presented work we implemented the localization algorithm on a wheeled skid-steer mobile robot Pioneer 3-AT. For the odometric sensor we used two encoders on the wheels and for scanning the environment we used the Laser Range Finder (LRF) sensor. The output of the LRF sensor are the measured distances to the environment objects at the laser-beam angles 0° to 180° . Since the indoor environments are usually composed of many straight-edged segments or walls, the environment map is represented by line segments. A line segment is described with the edge points and the normal line equation parameters. To solve the localization problem we used the extended Kalman filter. The convergence properties of the EKF and consequently the localization algorithm depends on setting the input- and the output-noise covariance matrices of the process. A prediction step of the EKF is performed by simulating the symmetric kinematic model of the robot motion. In the input-noise covariance matrix of the EKF the standard deviation of each robot-wheel's angular speed is estimated as being proportional to the wheel's angular speed. We presented a proposal for the experimental estimation of the parameter of the input-noise covariance matrix. The covariance matrix of the prediction step of the EKF estimated like this captures the uncertainties because of the modelling errors of the robot motion or the uncertainties arising from the inaccurately estimated parameters of the kinematic model. We aimed at finding the conservative estimate of the covariance matrix and in such a manner we tried to increase the stability of the EKF. The prediction estimate of the robot pose is in the correction step of the EKF improved by minimizing the differences between the line parameters from the current environment map and the line parameters from the global map, which are transformed according to the coordinates of the robot. The global environment map is built before the localization process and is given in advance. While moving in the space the robot from the reflection points of each environment scan builds local environment map. First, all the consecutive points by which the reflections have occurred are united in sets and the remaining points are ignored. Each set is then split into more sets if the distance between two consecutive points is greater than the threshold. If there are fewer than certain number of points in some set, the set is ignored. Each set of points is then split with the split-and-merge algorithm in the consecutive sets,

where each set of points corresponds to some environment line segment. If there are fewer than certain number of points in some set, the set is discarded. Some set of points is also discarded, if the length of the corresponding line segment is below a threshold value. The line parameters are calculated by using classic least squares (LSQ) method. The covariances of the line parameters, which arise from the LRF's distance- and angle-measurement error, comprise the output noise covariance matrix of the EKF. In the doctoral thesis we proposed a method for estimating the covariances of the normal line equation parameters, which results from the classic LSQ. Then we compared the proposed method with the method resulting from the orthogonal LSQ in terms of computational complexity and accuracy. In the comparison we showed that the proposed method, which results from the classic LSQ, is computationally less demanding. We analyzed the accuracy of both methods by performing a large number of experiments of estimating the covariances of the lines parameters. For this purpose we used the simulated measurements of the LRF sensor. The accuracy of the method resulting from the classic LSQ depends on the number of line-segment points from which the covariances of the line parameters are estimated. The accuracy of the method resulting from the orthogonal LSQ depends on the accuracy of estimating the variance of the LRF's distance-measurement error and the variance of the laser-beam angle error. To perform the correction step of the EKF, the pairs of line segments from the global and local map, which correspond to the same environment line segments (e.g., a wall), must be found. If the overlapping rate between the local and global line segments, which are chosen as the most similar, is below the threshold values, the line segments are paired. The range and angle measurements made with the used LRF sensor are at moderate speeds of the robot motion due to finite rotational speed of the sensor's mirror slightly distorted. The LRF's measurements are used in the correction step of the EKF. When deriving the EKF it is assumed, that the noises from the prediction and the correction step of the EKF are not correlated. If the LRF's measurements would be corrected by applying the same kinematic model of the robot motion as it is used in the prediction step of the EKF, this would cause the correlation between the noises from the prediction and the correction step of the EKF. Distorted measurements of the LRF sensor can be considered in the framework of the EKF by increasing the estimations of the LRF's distance- and angle-measurement variances and using

the orthogonal LSQ for estimating the covariances of the lines parameters. We performed the eksperiment of localizing the mobile robot Pioneer 3-AT in an indoor structured environment. We compared the robot's pose estimated by the EKF to the pose estimated by the original Pioneer 3-AT localization algorithm. The experimental results indicate the appropriateness of setting the input-noise covariance matrix of the EKF and the usefulness of the proposed method for estimating the covariances of the lines' parameters for the purpose of the mobile robot localization based on the EKF. In the prediction step of the EKF instead of symmetric kinematic model of the robot motion also the asymmetric kinematic model can be used. Optimal values of some parameters of the asymmetric motion model depend on the terrain under the robot, the distribution of the robot's mass and the dynamics of the robot motion. We presented a proposal for online estimation of the two chosen parameters of the asymmetric kinematic model, to be estimated as additional state variables of the EKF. On the basis of the designed algorithm for localizing the Pioneer 3-AT mobile robot we indicated a solution of the SLAM problem. We showed a strategy for matching the line segments from the local and global environment map, which is based on the overlapping rates between the local and global line segment and on the Mahalanobis distance between the local and global line. When in an EKF-SLAM algorithm two matched lines from the global map are merged into one line, the correction estimate of the state is changed. For this reason we presented a derivation to determine the new values of the covariance matrix of the state-correction.

Vsebina

Seznam slik	xv
Seznam tabel	xix
1. Uvod	1
1.1 Metdologija za reševanje problema lokalizacije	5
1.2 Uporabljene metode	13
2. Predikcijski del EKF-a	15
2.1 Vhodna kovariančna matrike EKF-a	19
2.1.1 Eksperimentalno ocenjevanje vhodne kovariančne matrike EKF-a	24
3. Korekcijski del EKF-a	29
3.1 Primerjanje daljic iz globalnega in lokalnega zemljevida	34
3.2 Napake pri merjenju razdalj ter kotov z LRF-om	36
3.3 Identifikacija parametrov premic	40
3.4 Ocena kovarianc parametrov premic	44
3.5 Ocena računske zahtevnosti kovarianc parametrov premice	48
3.6 Statistično vrednotenje točnosti ocenjenih kovarianc premice	53
4. Eksperimentalni rezultati lokalizacije	69
4.1 Rezultati lokalizacije z uporabo EKF-a	69

4.2	Rezultati lokalizacije z odometrijo	74
5.	Sprotno ocenjevanje parametrov asimetričnega kinematičnega modela	77
5.1	Asimetričen ter simetričen kinematičen model gibanja robota . . .	77
5.2	Sprotno ocenjevanje parametrov asimetričnega modela s pomočjo EKF-a	79
6.	Sočasna gradnja zemljevida ter lokalizacija	87
6.1	Predikcijski del SLAM-a	87
6.2	Korekcijski del SLAM-a	89
6.2.1	Iskanje parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida	91
6.2.2	Združevanje skladnih daljic iz globalnega zemljevida	95
7.	Sklep	103
8.	Prispevki k znanosti	107
	Literatura	109

Seznam slik

1.1	Ocenjevanje lege robota s Kalmanovim filtrom (a, b in c) ter filtrom delcev (d, e, f in g).	10
1.2	Mobilni robot Pioneer 3-AT.	13
2.1	Koordinatni sistem (k. s.) robota (osi x_R, y_R), k. s. laserskega senzorja razdalj (LRF, osi x_L, y_L) in globalni k. s. (osi x_G, y_G). . .	15
2.2	Meritve časa T med dvema zaporednima posnetkoma okolja z LRF-om.	18
3.1	Globalen ter lokalni zemljevid okolja sta sestavljena iz daljic. . . .	29
3.2	Točke odboja laserskih žarkov pripadajo segmentom v okolju (npr. stena). Razdalja med dvema zaporednima točkama je lahko velika (D_B), če je kot med laserskim žarkom ter steno majhen (problem vidljivosti).	30
3.3	Parametra premice (p_i, α_i) glede na globalne koordinate in parametra premice (r_i, ψ_i) glede na koordinate robota.	30
3.4	Točke, ki ustrezajo daljicam. Robna točka \mathbf{T}_R pripada obema sosednjima daljicama.	33
3.5	Stopnji prileganja $O_j(a_j, b_j)$ ter $O_j(c_j, d_j)$ med lokalno daljico L in globalno daljico G_j pretvorjeno v koordinate robota, kjer $\overline{G_j}$ označuje dolžino daljice G_j	35
3.6	Grupiranje točk v množice, ki ustrezajo daljicam.	42
3.7	Vrednosti funkcije $\psi(\hat{k}_l)$ na intervalu $\hat{k}_l \in [-1, 1]$ pri $\hat{c}_l > 0$ ter pri $\hat{c}_l < 0$	46
3.8	Relativni računski kompleksnosti $C_{r1}(n) = \frac{C_{ols1}(n)}{C_{ls}(n)}$ in $C_{r2}(n) = \frac{C_{ols2}(n)}{C_{ls}(n)}$ kot funkciji števila točk daljice $n \geq 6$	52

3.9	Ocenjevanje variance vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ iz vnaprej poznanih varianc razdalje ter kota laserskega žarka $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$	55
3.10	Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_r = \sqrt{var(r)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.	62
3.11	Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_\psi = \sqrt{var(\psi)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.	62
3.12	Rezultati ocenjevanja kovariance parametrov premice $cov(r, \psi)$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.	63
3.13	Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_r = \sqrt{var(r)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.	66
3.14	Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_\psi = \sqrt{var(\psi)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.	67
3.15	Rezultati ocenjevanja kovariance parametrov premice $cov(r, \psi)$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.	67
4.1	a) Primerjava med pozicijo robota $(\hat{x}_r(k), \hat{y}_r(k))$ ocenjeno z EKF-om ter pozicijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. b) Primerjava med orientacijo robota $\hat{\varphi}_r(k)$ ocenjeno z EKF-om ter orientacijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom.	71
4.2	a) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene pozicije robota $std(\tilde{x}_r(k))$ in $std(\hat{x}_r(k))$ v smeri koordinatne osi x_G . b) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene pozicije robota $std(\tilde{y}_r(k))$ in $std(\hat{y}_r(k))$ v smeri koordinatne osi y_G	72
4.3	a) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene orientacije robota $std(\tilde{\varphi}_r(k))$ in $std(\hat{\varphi}_r(k))$. b) Število parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida $N(k)$ med eksperimentom lokalizacije.	73
4.4	Meritve kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$.	74

4.5	a) Primerjava med pozicijo robota ocenjeno s simulacijo kinematičnega modela ter pozicijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. b) Primerjava med orientacijo robota ocenjeno s simulacijo kinematičnega modela ter orientacijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. . . .	75
4.6	Meritve kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$.	76
6.1	Daljice iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja.	92
6.2	Točki lokalne daljice projiciramo na skladno globalno premico, zato se nova globalna daljica delno prekriva z drugo globalno daljico. .	95

Seznam tabel

3.1	Računska zahtevnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ, v primeru ničelne in neničelne variance kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$	49
3.2	Računska zahtevnost metode, ki izhaja iz navadnih LSQ.	50
3.3	Tri daljice iz okolja, ki ustrezajo $n = 36$ odbojnim točkam.	53
3.4	Primerjava točnosti obeh metod, ki izhajata iz navadnih (cLSQ) ter ortogonalnih LSQ (oLSQ), v primeru šuma z ničelno standardno deviacijo kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j} = 0rd$. Simulirane so tri različne daljice iz okolja $(r_{ei}, \psi_{ei}; i = 1, 2, 3)$	59
3.5	Primerjava točnosti obeh metod, ki izhajata iz navadnih (cLSQ) ter ortogonalnih LSQ (oLSQ), v primeru šuma z ne-ničelno standardno deviacijo kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j} = 17 * 10^{-4}rd$. Simulirane so tri različne daljice iz okolja $(r_{ei}, \psi_{ei}; i = 1, 2, 3)$	60

1. Uvod

Lokalizacija mobilnega robota je temeljni problem, ki ga je potrebno rešiti v mobilni robotiki. Če robot pozna svojo lego v prostoru, je lahko avtonomen v izvrševanju zadanih nalog. Robot se zunaj stavb lahko enostavno lokalizira s pomočjo GPS (Global positioning sensor) senzorja. Znotraj stavb GPS rešitev ne pride v poštev, zato se mora robot zanesti na svoje lastne senzorje. Robot se lahko lokalizira s pomočjo odometrije, kjer se pogosto uporabljajo sledeči senzori: inkrementalni merilnik zasuka koles (enkoder), pospeškometer, žiroskop in kompas. V [13, 3, 29, 64, 2] so predstavljeni nekateri modeli za ocenjevanje lege robota na podlagi odometrije. Pogosta uporabljena platforma mobilnega robota je vozilo, ki zavija z zdrsavanjem koles tako, da levi par koles vrta z drugačno hitrostjo kot desni par koles. Tak mobilni robot torej zavija podobno kot gosenično vozilo. Za detekcijo spremembe orientacije mobilnega robota, ki jo z uporabo enkoderjev na kolesih oziroma motorjih mobilnega robota ne zaznamo, je koristno uporabiti dodatne senzorje na robotu (npr. žiroskop) [37]. Lokalizacija mobilnega robota samo z odometrijo je netočna, saj se napaka, ki izhaja iz netočnosti odometrijskega modela in merilnega šuma odometrijskega senzorja, s časom akumulira. Robot lahko izboljša oceno svoje lege v prostoru z uporabo zemljevida okolja. Robot se v prvem koraku lokalizira z odometrijo v drugem koraku pa tako, da lokalni zemljevid okolja primerja z že zgrajenim globalnim zemljevidom okolja. Lokalni zemljevid je zgrajen iz podatkov senzorja, ki v danem trenutku posname okolje. Za ta namen so na mobilnem robotu pogosto uporabljeni senzori razdalje (ultrazvočni senzor ali laserski senzor razdalj) ali kamera. Pri tem načinu lokalizacije gre torej za integracijo informacije dveh senzorjev, odometrskega in senzorja, ki podaja informacijo iz okolja. Za rešitev problema lokalizacije je v literaturi moč najti različne pristope: prikriti Markovovi modeli, razširjen Kalmanov filter (Extended Kalman Filter-EKF) ter filter delcev (Particle filter) [19]. V [7] se Kalmanov filter kombinira s prikritimi Markovovimi modeli. Primerjava

lokalnega ter globalnega zemljevida okolja je lahko izvedena s primerjavo lokacij skladnih značilik iz obeh zemljevidov. V literaturi je zaslediti, da se za iskanje parov skladnih značilik iz lokalnega ter globalnega zemljevida pogosto uporablja Mahalanobisova razdalja [60, 42, 61, 4].

Robot torej potrebuje globalni zemljevid okolja, da se lahko učinkovito lokalizira. Robotu lahko pred procesom lokalizacije globalen zemljevid okolja poda človek. V nasprotnem primeru se robot lahko lokalizira s pomočjo zemljevida, ki ga zgradi sam. Da robot lahko zgradi globalni zemljevid okolja, mora poznati svojo lego v prostoru. Velja tudi obratno. Da se robot lahko učinkovito lokalizira potrebuje globalni zemljevid okolja. Problema gradnje globalnega zemljevida in lokalizacije sta torej medsebojno odvisna in robot mora sočasno graditi globalni zemljevid okolja in se lokalizirati, kar je poznano kot SLAM (Simultaneous Localization and Mapping) algoritem. Za rešitev problema SLAM je potrebno oceniti skupno stanje, ki sestoji iz lege robota ter lokacij značilik iz okolja [6].

V [52] je predstavljena obsežna študija problema SLAM. V literaturi je zaslediti različne pristope h gradnji zemljevida za namen lokalizacije. Topološki zemljevid [54] je sestavljen iz vozlišč, ki predstavljajo topološke lokacije, in povezav med vozlišči. Vozlišča vsebujejo informacijo kako priti iz ene topološke lokacije v drugo. V [54] sta metrična in topološka paradigma združena v hibriden sistem za gradnjo zemljevida. Z metričnim pristopom gradimo zemljevid okolja z mrežo celic (occupancy grids) ali enostavnimi geometrijskimi lastnostmi (npr. daljice). Mreže celic zahtevajo ogromno računalniškega pomnilnika in zato niso primerne za modeliranje obsežnih okolij [55]. Za predstavitev okolja so pogosto uporabljene daljice [5, 9, 12, 64, 4, 8, 67]. Vendar pa je tak opis primeren le za strukturirana okolja [22, 23, 29, 45, 46, 65], ki so večinoma sestavljena iz ravnih objektov ali sten. Ponavadi so to okolja znotraj stavb. V [45, 44] lahko najdemo primerjavo algoritmov za določanje daljic iz posnetkov LRF-a. V našem delu je izbran algoritem razdeli-in-zlij, ki je glede na to primerjavo hiter in natančen. V delu [8] je predstavljen algoritem za določanje premic, ki pristop mehkega rojenja kombinira z metodo razdeli-in-zlij. S to kombinacijo je možno uporabiti algoritem za mehko rojenje, brez da bi vnaprej poznali število rojev oziroma njihovih centrov. V [67] je predlagan robusten regresijski algoritem za določanje daljic v statičnih in dinamičnih okoljih z ozirom na ekstremne vrednosti podatkov (ang.,

outliers) ter šum senzorskih podatkov. Ekstremne vrednosti podatkov ustrezajo dinamičnim objektom kot so na primer ljudje v gibanju. Parametri premic so pogosto ocenjeni z uporabo Hough-ovega transformata [21, 24, 46, 48], vendar pa je ta algoritem računsko zahteven in rezultat algoritma ne vključuje robnih točk daljic, ki so pomembna informacija za lokalizacijo in gradnjo zemljevida. V [36] je okolje predstavljeno z zaporednimi daljicami (polylines), ki lahko vsebujejo veliko informacije o obliki objektov v okolju. Oblika je lahko pomembna informacija za primerjanje zaporednih posnetkov okolja pri lokalizaciji. V [16] je predstavljena metoda za primerjanje laserskih posnetkov, ki deluje v polarnem koordinatnem sistemu laserja in tako izkorišča prednosti strukture laserskih meritev. V [47] se iz vsakega laserskega posnetka izločijo daljice. Daljice se potem uporabi za izračun histogramov. S korelacijo histogramov dveh zaporednih posnetkov se poišče orientacijo in pozicijo robota glede na orientacijo in pozicijo pri prejšnjem laserskem posnetku. V [15] je vsaka posamezna meritev razdalje z LRF-om upoštevana kot neodvisna dimenzija in ocena pozicije robota sloni na analizi glavnih komponent (PCA) podatkov laserskega sensorja.

Za rešitev kompleksnega problema SLAM je v literaturi najbolj pogosto uporabljen pristop z EKF-om [22, 52, 19]. Zemljevid okolja je predstavljen z množico značilk iz okolja. Vsakič, ko robot s senzorjem razdalje ali kamero posname okolje, je potrebno v EKF-SLAM algoritmu obnoviti vse značilke iz globalnega zemljevida okolja in kovariančno matriko vektorja vseh globalnih značilk. To pomeni, da obseg računske zahtevnosti EKF-SLAM algoritma raste s kvadratom značilk v globalnem zemljevidu [19]. SLAM je poznan kot računsko zelo kompleksen algoritem in za zmanjšanje računske zahtevnosti je bilo razvitih veliko pristopov [6]. Računsko zahtevnost izračuna kovariančne matrike predikcijske ocene stanja EKF-SLAM-a lahko zmanjšamo [63], če predpostavimo da se lega značilk v prostoru ne spreminja. Razlog za to je, da je takrat potrebno obnoviti le kovarince spremenljivk stanja, ki opisujejo lego robota, ter kovarince med lego robota ter značilkami iz zemljevida. V [26] je predstavljen algoritem za zmanjšanje računske zahtevnosti SLAM-a imenovan zgoščen EKF, kjer je vsa informacija dobljena iz nekega lokalnega območja shranjena in vzdrževana s stroški, ki so proporcionalni kvadratu števila značilk iz tega lokalnega območja. To informacijo je potem samo v eni iteraciji možno vključiti v celoten zemljevid okolja pri polni računski zahtevnosti SLAM-a. Uporaba zgoščenega EKF-a je prikazana tudi v referencah [66, 20].

V članku [34] je predstavljena metoda imenovana Tehnika odlašanja (Postponement technique) za izboljšanje računske učinkovitosti EKF-SLAM-a. Metoda omogoča veliko stopnjo prilagodljivosti, glede na to kdaj naj se izrabi procesorski čas, ki je na voljo. Za izboljšanje računske zahtevnosti je v [50] predstavljen algoritem, kjer so lokalni zemljevidi zgrajeni vzdolž omejenega dela poti robota, nato pa je vsak lokalni zemljevid združen z globalnim. Poleg EKF-a se uporablja tudi tako imenovani razširjen informacijski filter (Extended Information Filter-EIF) [53], ki namesto kovariančne matrike vzdržuje inverz kovariančne matrike oziroma informacijsko matriko. V delu [53] je za rešitev problema SLAM predlagan redek razširjen informacijski filter (Sparse EIF-SEIF). Le ta temelji na lastnosti, da je veliko izven-diagonalnih členov normirane informacijske matrike blizu vrednosti nič [53]. Zato so ti izven diagonalni členi nastavljeni na vrednost nič, kar povzroči redko informacijsko matriko in posledično zmanjšanje računske zahtevnosti SLAM algoritma. V [56] je prikazano, da je SEIF globalno nekonsistenten, zato je v tem delu predstavljen popolnoma redek razširjen informacijski filter (Exactly Sparse Extended Information Filter - ESEIF). ESEIF v primerjavi s SEIF-om dopušča konzervativne ocene za zemljevid okolja ter lego robota tako, da so le-te skoraj identične ocenam dobljenim z uporabo EKF-a [56]. V delu [58] je predstavljen algoritem D-SLAM, ki SLAM loči na problem ocenjevanja zemljevida okolja ter na problem ocenjevanje lege robota. Če se za rešitev D-SLAM-a uporabi EIF, je informacijska matrika, ki se nanaša na gradnjo zemljevida, popolnoma redka, kar zelo izboljša računsko učinkovitost [58]. V [25] je predstavljena metoda relativne predstavitve značilk (Relative Landmark Representation-RLR), s katero je zemljevid okolja razdeljen na pod-območja tako, da so značilke določene glede na lokalne koordinatne sisteme. Križne korelacije med relativnimi značilkami, ki so pridružene različnim lokalnim koordinatnim sistemom, stremijo k zelo majhnim vrednostim [25]. Zato se jih lahko zanemari, s čimer se v obsežnih okoljih zelo izboljša računsko učinkovitost in zmanjšajo potrebe po računalniškem pomnilniku [25]. Podobno je v [14] predlagana strategija za gradnjo zemljevida, v kateri je okolje opisano z množico povezanih lokalnih zemljevidov. Ohranjene so samo kovariance med lokalnimi zemljevidi ter kovariance med značilkami, ki pripadajo istemu lokalnemu zemljevidu [14]. Predlagana strategija v primerjavi z originalnim oziroma globalnim pristopom h gradnji zemljevida omogoča veliko zmanjšanje računske zahtevnosti in potreb po računalniškem pomnilniku.

Za namen izboljšanja učinkovitosti gradnje zemljevida obsežnih okolij v okviru algoritma SLAM je v delu [11] okolje prav tako, namesto z enim globalnim zemljevidom, predstavljeno z množico povezanih lokalnih zemljevidov.

Konvergenčne lastnosti EKF-a in posledično SLAM algoritma so odvisne od nastavitve vhodne ter izhodne kovariančne matrike procesa. V okolju, ki je opisano z daljicami, kovariance parametrov premic sestavljajo izhodno kovariančno matriko EKF-a. V člankih [46, 22, 9, 64, 29, 5, 12] so prikazane nekatere metode za ocenjevanje kovarianc parametrov normalne enačbe premice.

1.1 Metodologija za reševanje problema lokalizacije

Za ocenjevanje stanja dinamičnega sistema oziroma lege robota v prostoru se najpogosteje uporabljata Kalmanov filter (KF) ter filter delcev (ang., particle filter). Najprej predpostavimo, da se mobilni robot vozi po prostoru in da s pomočjo sensorja zaznava značilke iz okolja. V časovnem trenutku k definirajmo naslednje veličine [19]:

- \mathbf{x}_k : vektor stanja, ki opisuje lego robota.
 $\mathbf{X}_{0:k} = \{\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k\} = \{\mathbf{X}_{0:k-1}, \mathbf{x}_k\}$: zgodovina leg robota.
- \mathbf{u}_{k-1} : vhodni vektor izvršen v trenutku $k-1$, ki robota pripelje v stanje \mathbf{x}_k v trenutku k .
 $\mathbf{U}_{0:k-1} = \{\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{k-1}\} = \{\mathbf{U}_{0:k-2}, \mathbf{u}_{k-1}\}$: zgodovina vhodnih vektorjev.
- \mathbf{m}_i : vektor, ki opisuje lokacijo i -te značilke iz okolja.
 $\mathbf{m} = \{\mathbf{m}_1, \mathbf{m}_2, \dots, \mathbf{m}_n\}$ množica lokacij vseh značilk oziroma zemljevid okolja.
- \mathbf{z}_k : opazovanje značilk iz okolja oziroma meritve s sensorjem na robotu v trenutku k .
 $\mathbf{Z}_{0:k} = \{\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \dots, \mathbf{z}_k\} = \{\mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{z}_k\}$: zgodovina vseh opazovanj značilk.

Problem lokalizacije lahko potem zapišemo v naslednji verjetnostni obliki [17, 28, 6]

$$P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m}), \quad (1.1)$$

kjer je za vsak časovni trenutek k potrebno izračunati oziroma oceniti porazdelitev gostote verjetnosti, da se robot v trenutku k nahaja v legi \mathbf{x}_k , pri čemer ima robot na voljo množico vseh opazovanj značilk $\mathbf{Z}_{0:k}$ do trenutka k , zgodovino vhodnih vektorjev $\mathbf{U}_{0:k-1}$ do prejšnjega trenutka $k-1$ ter zemljevid okolja \mathbf{m} . Z uporabo Bayesovega verjetnostnega teorema ter Markovove lastnosti lahko zgornjo verjetnost (1.1) zapišemo v naslednji dvokoračni (predikcija, korekcija) rekurzivni obliki [19].

Predikcija

$$P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m}) = \int P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1}) P(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-2}, \mathbf{m}) d\mathbf{x}_{k-1}, \quad (1.2)$$

Korekcija

$$P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m}) = \frac{P(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{m}) P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})}{P(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-1})}. \quad (1.3)$$

Opazujmo najprej predikcijski del zgornje formulacije. $P(\mathbf{x}_{k-1} | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-2}, \mathbf{m})$ (1.2) je ocenjena porazdelitvena funkcija gostote verjetnosti lege robota iz prejšnje korekcije (trenutek $k-1$). $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}, \mathbf{u}_{k-1})$ (1.2) je model gibanja robota. Če robot pozna svojo lego iz prejšnjega trenutka \mathbf{x}_{k-1} ter vhodni vektor iz prejšnjega trenutka \mathbf{u}_{k-1} , lahko iz omenjenega modela gibanja robota sklepa na svojo trenutno lego \mathbf{x}_k . Lega robota \mathbf{x}_k v trenutku k je odvisna le od lege robota v prejšnjem trenutku \mathbf{x}_{k-1} ter vhoda \mathbf{u}_{k-1} iz prejšnjega trenutka, ni pa odvisna od leg robota ter vhodov pred trenutkom $k-1$ [19]. To karakteristiko imenujemo Markovova lastnost. Lega robota \mathbf{x}_k v trenutku k je prav tako neodvisna od opazovanj okolja $\mathbf{Z}_{0:k}$ ter zemljevida okolja \mathbf{m} . Sedaj pa opazujmo še korekcijski del rekurzivnega postopka ocenjevanja lege robota (1.3). $P(\mathbf{z}_k | \mathbf{Z}_{0:k-1}, \mathbf{U}_{0:k-1})$ je ocenjena porazdelitev gostote verjetnosti lege robota iz tekoče predikcije. $P(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k, \mathbf{m})$ pa je model opazovanja okolja [19]. Ta model opisuje verjetnost, da v trenutku k s senzorjem na robotu izmerimo vrednosti \mathbf{z}_k , če predpostavimo, da se robot nahaja v legi \mathbf{x}_k , ter če poznamo zemljevid okolja \mathbf{m} . V korekcijskem delu rekurzivnega postopka torej s senzorskimi meritvami, s katerimi v trenutku k opazujemo okolje, izboljšamo oceno porazdelitvene funkcije gostote verjetnosti lege robota, ki je ocenjena v predikcijskem delu. Kot najboljšo oceno lege robota iz porazdelitve funkcije $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})$ izberemo tisto lego \mathbf{x}_k , ki je najbolj verjetna [17].

V kolikor za porazdelitev gostote verjetnosti izberemo Gaussovo porazdelitev, se enačbi (1.2, 1.3) poenostavita v Kalmanov filter [17]. Če želimo izbrati bolj splošno porazdelitev gostote verjetnosti, pa lahko izberemo filter delcev, ki se prav tako pogosto uporablja za namen lokalizacije mobilnega robota. KF predpostavlja, da je šum, ki nastopa na vhodu, na izhodu ter v samem procesu beli šum z Gaussovo porazdelitvijo ter da je sistem linearen. Dokler je porazdelitev šuma v grobem Gaussova, je rešitev s pomočjo KF-ja v praksi lahko uporabna, vendar potem ni zagotovljena optimalnost filtra [17]. Če proces ni linearen, ga je potrebno linearizirati in potem lahko uporabimo KF. V tem primeru govorimo o razširjenemu Kalmanovem filtru. Linearizacija procesa oziroma izhoda procesa je točna le v okolici točke linearizacije oziroma v okolico trenutnega stanja in trenutnega vhoda v sistem. V kolikor so odmiki od delovne točke preveliki, so napake pri linearizaciji lahko prevelike, kar lahko povzroči divergenco EKF-a [17].

Do konca tega odstavka iz [31] povzemamo lastnosti linearizacije, prav tako pa bomo orisali tudi transformacijo unscented transform [57, 31], ki poskuša omiliti slabosti linearizacije. Predpostavimo, da ima vektor naključnih spremenljivk \mathbf{x} povprečje $\bar{\mathbf{x}}$ in kovariančno matriko \mathbf{P}_{xx} , vektor naključnih spremenljivk \mathbf{y} pa je z vektorjem \mathbf{x} povezan preko nelinearne funkcije $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Želimo oceniti dejansko povprečje $\bar{\mathbf{y}}$ ter dejansko kovariančno matriko \mathbf{P}_{yy} vektorja slučajnih spremenljivk \mathbf{y} . Ocena je konsistentna, če je izpolnjena naslednja neenakost $\hat{\mathbf{P}}_{yy} - \mathbf{P}_{yy} \geq 0$, kjer $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ predstavlja ocenjeno kovariančno matriko. Če ta neenakost ni izpolnjena oziroma, če so ocenjene variance slučajnih spremenljivk vektorja \mathbf{y} manjše od resničnih, da Kalmanov filter informaciji vsebovani v vektorju \mathbf{y} preveliko utež. To pa lahko povzroči divergenco Kalmanovega filtra. Vendar pa konsistenca ne pomeni nujno učinkovitosti filtra, saj lahko ocenjena negotovost $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ močno presega resnično negotovost \mathbf{P}_{yy} . Zato je zaželeno, da je ocenjena negotovost $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ večja ali enaka in hkrati čim bližje resnični negotovosti \mathbf{P}_{yy} . Povprečje ter kovariančna matrika vektorja slučajnih spremenljivk \mathbf{y} sta s pomočjo linearizacije ocenjena kot

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}), \quad \hat{\mathbf{P}}_{yy} = \nabla \mathbf{f} \mathbf{P}_{xx} (\nabla \mathbf{f})^T. \quad (1.4)$$

V praksi linearizacija povzroči pristransko oceno (ang, bias) povprečja $\hat{\mathbf{y}}$, ki se ne sklada z dejanskim povprečjem $\bar{\mathbf{y}}$. Prav tako pa linearizacija lahko povzroči nekonsistentno ocenjeno kovariančno matriko $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ (1.4). Konsistentnost lahko v pra-

ksi poskušamo zagotoviti z vpeljavo dodatnega stabilizacijskega šuma, ki poveča matriko $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ (1.4). Vendar pa na ta način ne zmanjšamo pristranskosti ocenjenega povprečja $\hat{\mathbf{y}}$ (1.4). Za izboljšanje ocen $\hat{\mathbf{y}}$ ter $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ oziroma za zmanjšanje pristranskosti ter izboljšanje konsistence je v literaturi namesto linearizacije predlagana transformacija imenovana unscented transform (UT). Na omenjeni transformaciji temelji Unscented Kalman Filter (UKF), ki poskuša izboljšati slabe lastnosti EKF-a, ki izhajajo iz linearizacije. Zato do konca tega odstavka iz referenc [57, 31] povzemimo transformacijo UT. UT je metoda s pomočjo katere izračunamo statistične lastnosti n dimenzionalnega vektorja naključnih spremenljivk \mathbf{x} , ki prehaja skozi nelinearno transformacijo. Najprej na determinističen definiramo množico $2n + 1$ točk \mathcal{X}_i (sigma točke) ter njihovih uteži W_i , tako da je povprečje točk enako ravno $\bar{\mathbf{x}}$, njihova kovariančna matrika pa \mathbf{P}_{xx} . Vsako točko z nelinearno transformacijo preslikamo v točko $\mathcal{Y}_i = \mathbf{f}(\mathcal{X}_i)$. Iz množice transformiranih točk \mathcal{Y}_i ter uteži W_i ocenimo povprečje ter kovariančno matriko vektorja slučajnih spremenljivk \mathbf{y} kot

$$\hat{\mathbf{y}} = \sum_{i=0}^{2n} W_i \mathcal{Y}_i, \quad \hat{\mathbf{P}}_{yy} = \sum_{i=0}^{2n} W_i (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}}) * (\mathcal{Y}_i - \bar{\mathbf{y}})^T. \quad (1.5)$$

Določen člen razvoja nelinearne transformacije $\mathbf{f}(\cdot)$ v Taylorjevo vrsto ustreza določenemu redu nelinearnosti te transformacije. UT algoritem v primerjavi z linearizacijo delno vključuje informacijo tudi o višjih redih nelinearnosti. Povprečje $\hat{\mathbf{y}}$ ter kovariančna matrika $\hat{\mathbf{P}}_{yy}$ naj bi bila z UT algoritmom (1.5) ocenjena bolj točno kot z linearizacijo (1.4) [31]. Pri uporabi EKF-a je potrebno določiti Jacobijevo matriko odvodov, kar v nekaterih aplikacijah lahko predstavlja izvedbene težave. Prednost pristopa z UT-jem je, da Jacobijeve matrike ni potrebno izračunati. UT metoda zahteva v primerjavi s filtrom delcev mnogo manjše število $(2n + 1)$ vzorcev \mathcal{X}_i oziroma delcev s katerimi poskušamo aproksimirati porazdelitev verjetnosti. Poleg tega so pri UT metodi vzorci določeni deterministično, medtem ko so pri metodah tipa Monte Carlo delci izbrani naključno.

V [27] je lokalizacija mobilnega robota izvedena z integracijo podatkov iz odometrije ter žiroskopa, za kar je uporabljen UKF. Rezultati so pokazali, da je lega robota ocenjena z UKF-om bolj točna od lege ocenjene z EKF-om. Tudi referenca [38] prikazuje primerjavo med učinkovitostjo UKF ter EKF algoritma za namen lokalizacije mobilnega robota. V [32] pa je UT algoritem uporabljen za

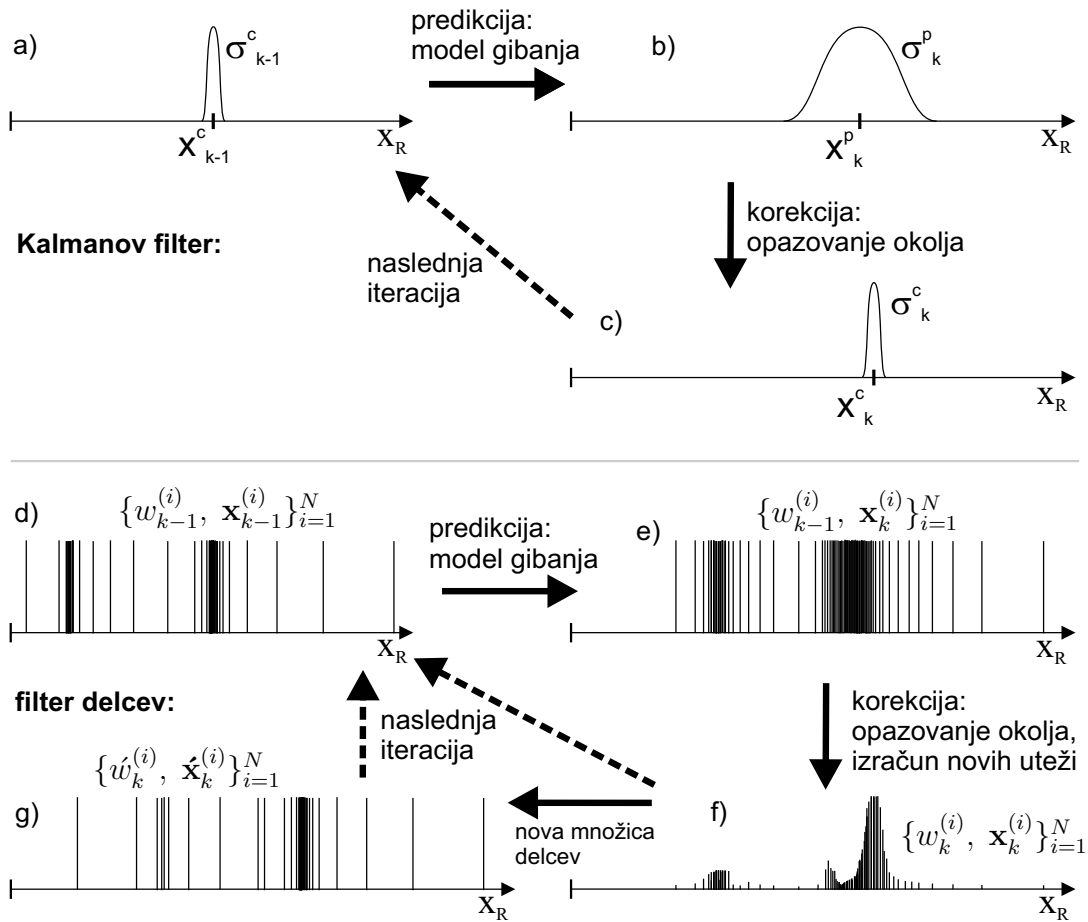
rešitev problema SLAM.

Slika 1.2 prikazuje princip ocenjevanja lege robota s pomočjo KF-ja ter pristop z uporabo filtra delcev. Tukaj predpostavljamo, da se robot lahko premika samo naravnost v smeri koordinatne osi x_R . Prejšnja korekcijska ocena lega robota je označena z x_{k-1}^c (slika 1.2a). Robota nato z vhodnim signalom u_{k-1} premaknemo naprej. Novo lego robota v predikcijskem delu KF-ja ocenimo z modelom gibanja robota in jo označimo z x_k^p (slika 1.2b). Zaradi negotovosti modela gibanja robota ter negotovosti vhodnega signala se standardna deviacija Gaussove porazdelitve napake predikcijske ocene lege σ_k^p glede na standardno deviacijo napake prejšnje korekcijske ocene lege σ_{k-1}^c poveča. V korekcijskem delu KF-ja uporabimo natančne senzorske meritve, s katerimi opazujemo okolje. Negotovost lege korekcijske ocene lege robota x_k^c je zato manjša od negotovosti predikcijske ocene lege robota x_k^p (slika 1.2c). To se odraža v standardni deviaciji napake korekcijske ocene lege σ_k^c , ki je manjša od standardne deviacije napake predikcije σ_k^p .

Rešitev problema lokalizacije s pomočjo EKF-a bo podrobneje predstavljena v nadaljevanju. Zato tukaj orišimo pristop s pomočjo filtra delcev, ki ga povzemamo iz referenc [6, 17, 28, 1]. Porazdelitev gostote verjetnosti $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{0:k})$ (1.1) aproksimiramo z množico N vzorcev oziroma delcev $\{w_k^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ [1]. $w_k^{(i)}$ so uteži pomembnosti posameznih delcev $\mathbf{x}_k^{(i)}$ in vse skupaj predstavljajo približek verjetnostni gostoti $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{0:k})$ (slika 1.1f), tako da velja $\sum_{i=1}^N w_k^{(i)} = 1$. V tem primeru lahko matematično upanje lege robota \mathbf{x}_k aproksimiramo kot sledi

$$\int \mathbf{x}_k P(\mathbf{x}_k | \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{Z}_{0:k}) \approx \sum_{i=1}^N w_k^{(i)} \mathbf{x}_k^{(i)}. \quad (1.6)$$

Pri uporabi EKF-a je predpostavljena unimodalna (en vrh) Gaussova porazdelitev gostote verjetnosti (slike 1.2a, b in c). Kot je razvidno na sliki 1.1f pa je z uporabo filtra delcev možno aproksimirati bolj splošno porazdelitev [17], ki pa je lahko tudi večmodalna (več vrhov) [28]. Vsak delec oziroma lega robota $\mathbf{x}_k^{(i)}$ s pripadajočo utežjo $w_k^{(i)}$ predstavlja eno izmed N hipotez, kje v prostoru se nahaja robot [28]. V predelih, kjer so delci bolj zgoščeni (slike 1.1d, e in g), oziroma v predelih, kjer so vrednosti uteži višje (slika 1.1f), se robot nahaja z večjo verjetnostjo. Teh zgoščin oziroma hipotez z večjo verjetnostjo je lahko tudi več. Zato lahko filter delcev uporabimo tudi za rešitev problema lokalizacije mobilnega robota, ko nimamo prav nobene informacije, kje v prostoru se nahaja robot



Slika 1.1: Ocenjevanje lege robota s Kalmanovim filtrom (a, b in c) ter filtrom delcev (d, e, f in g).

[28]. Takrat je med samim procesom lokalizacije namreč možnih več predpostavk o legi robota, ki imajo veliko verjetnost.

Prikažimo en cikel ene izmed različic rekurzivnega filtra delcev [6, 17, 28, 1]:

Predikcija:

Iz porazdelitvene funkcije $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1})$, ki predstavlja kinematičen modela gibanja robota, glede na vhod \mathbf{u}_{k-1} za vsak delec $\mathbf{x}_{k-1}^{(i)}$ ($i = 1, \dots, N$) iz prejšnjega trenutka $k - 1$ (slika 1.1d) posebej oceni lego tega delca za trenutek k (slika 1.1e)

$$\mathbf{x}_k^{(i)} \sim P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1}). \quad (1.7)$$

Delec $\mathbf{x}_k^{(i)}$ je vzorec, ki ga vrne porazdelitvena funkcija verjetnosti $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}, \mathbf{u}_{k-1})$.

Korekcija:

Iz observacijskega modela $P(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}, \mathbf{m})$ glede na opazovanje značilk iz okolja \mathbf{z}_k v trenutku k za vsak delec posebej izračunaj novo utež

$$\hat{w}_k^{(i)} = w_{k-1}^{(i)} P(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}, \mathbf{m}), \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.8)$$

$P(\mathbf{z}_k | \mathbf{x}_k^{(i)}, \mathbf{m})$ je verjetnost, da v trenutku k s senzorjem na robotu izmerimo vrednosti \mathbf{z}_k , če predpostavimo, da se robot nahaja v legi $\mathbf{x}_k^{(i)}$. Nove uteži $\hat{w}_k^{(i)}$ nato normiraj (slika 1.1f) in iz normiranih uteži izračunaj efektivno število delcev N_{eff} kot sledi

$$w_k^{(i)} = \frac{\hat{w}_k^{(i)}}{\sum_{j=1}^N \hat{w}_k^{(j)}}, \quad i = 1, \dots, N, \quad N_{eff} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (w_k^{(i)})^2}. \quad (1.9)$$

Če je efektivno število delcev N_{eff} manjše od praga, potem določi novo množico delcev [1, 17]:

Določitev nove množice delcev (ang. resampling):

Iz trenutne množice delcev $\{\mathbf{x}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$ določi novo množico N -tih delcev $\hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}$ (slika 1.1g). Vsak delec $\mathbf{x}_k^{(i)}$ zamenjaj s kopijami tega delca ali z novimi delci z verjetnostjo, ki je proporcionalna uteži $w_k^{(i)}$ (1.9). Iz delca, ki ima veliko utež nastane več kopij ali več novih delcev, delci ki imajo majhno utež pa izginejo [28, 17].

Določi uteži novih delcev za $i = 1, \dots, N$ kot $\hat{w}_k^{(i)} = \frac{1}{N}$. Uteži vseh delcev so enake (slika 1.1g). V naslednjem predikcijskem koraku rekurzivnega filtra (slika 1.1d) uporabi novo množico delcev ter njihovih uteži $\{w_k^{(i)}, \mathbf{x}_k^{(i)}\}_{i=1}^N = \{\hat{w}_k^{(i)}, \hat{\mathbf{x}}_k^{(i)}\}_{i=1}^N$.

Za izvršitev zgornjega algoritma je potrebno podati začetno množico delcev ter njihovih uteži $\{w_{k-1}^{(i)}, \mathbf{x}_{k-1}^{(i)}\}_{i=1}^N$. Če nimamo nobene informacije o legi robota [28], lahko začetne lege delcev v prostoru določimo naključno glede na enakomerno porazdelitev, njihove uteži pa nastavimo na enako vrednost $\frac{1}{N}$. Filter sčasoma iz podatkov senzorjev najde porazdelitev delcev, ki bolje aproksimira dejansko porazdelitev lege robota $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})$ (1.3). Po izvršenem korekcijskem delu filtra lahko delec $\mathbf{x}_k^{(i)}$ z največjo verjetnostjo oziroma utežjo $w_k^{(i)}$ izberemo kot

najboljšo oceno lege robota v trenutku k [28]. Kot najboljšo oceno lege pa lahko uporabimo tudi uteženo povprečje delcev, katerih razdalja od delca z največjo utežjo je manjša od neke predpisane razdalje [28].

Poleg uteži delcev tudi sama gostota delcev predstavlja oziroma aproksimira porazdelitev verjetnosti $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})$ (slike 1.1d, e, f in g) [28]. Tam kjer funkcija verjetnostne porazdelitve zavzema večje vrednosti, naj bo tudi gostota delcev večja. Iz [17, 28] do konca tega odstavka povzemamo naslednjo problematiko. Pri uporabi filtra delcev je velik problem kako zagotoviti, da delci primerno predstavljajo omenjeno porazdelitev. Računska zahtevnost algoritma je, če izvzamemo določitev nove množice delcev, premo sorazmerna številu delcev N , ki ga je zato smotrno omejiti. Vendar tudi s končnim številom delcev ni zagotovljeno, da delci s svojimi utežmi primerno predstavljajo porazdelitev $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})$. To vodi do problema degeneracije, ko ima po nekaj iteracijah algoritma en delec mnogo višjo verjetnost oziroma utež $w_k^{(i)}$ od vseh preostalih delcev, ki imajo skoraj ničelno utež. Tako je porazdelitev verjetnosti dejansko predstavljena le z enim delcem z visoko verjetnostjo in velikim številom delcev z zelo majhno verjetnostjo, kar pa ni dober približek dejanske porazdelitve. Zato je določitev nove množice delcev (ang. resampling), ki bolje aproksimira dejansko porazdelitev verjetnosti $P(\mathbf{x}_k | \mathbf{Z}_{0:k}, \mathbf{U}_{0:k-1}, \mathbf{m})$, ključen element za uspešno implementacijo filtra delcev. Cilj je odstraniti delce z zelo majhno utežjo in povečati število delcev (hipotez) z večjo utežjo tako, da je v področjih z večjo verjetnostjo večja gostota delcev, v področjih z manjšo verjetnostjo pa manjša. Določitev nove množice delcev je lahko računsko zahtevna, zato ni nujno, da se ta operacija izvrši v vsaki iteraciji algoritma. Nova množica delcev se zato lahko določi vsakih nekaj časovnih korakov [6] ali, ko je efektivno število delcev N_{eff} (1.9) manjše od praga.

Pri reševanju problema SLAM je stanje, ki ga je potrebno oceniti, sestavljeno iz lege robota ter lokacij značilik iz okolja. Zaradi velike dimenzije stanja je direktna uporaba filtra delcev za rešitev problema SLAM računsko neizvedljiva [6], vendar pa je računsko kompleksnost mogoče zmanjšati z uporabo tehnike Rao-Blackwellization [17].

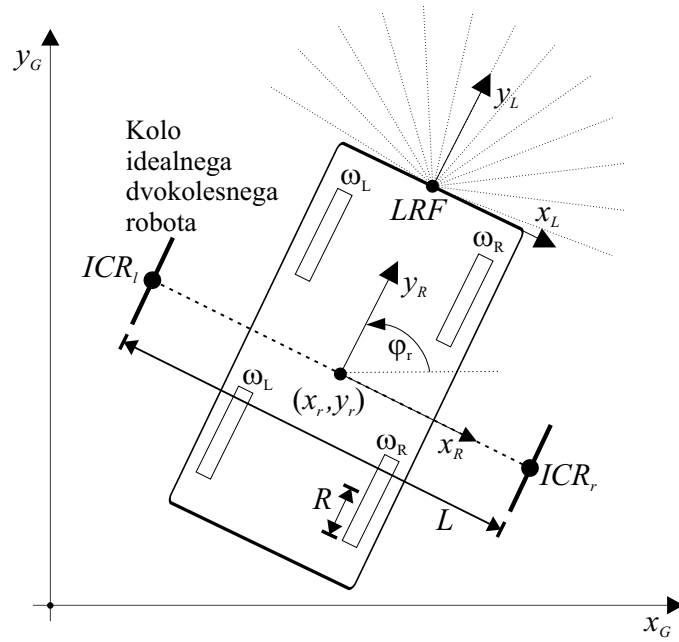
1.2 Uporabljene metode

Algoritem za lokalizacijo smo testirali na mobilnem robotu v strukturiranem okolju z ravnimi stenami oziroma v okolju znotraj stavb. Uporabili smo štirikolesni mobilni robot (slika 1.2) Pioneer 3-AT, ki je opremljen z inkrementalnimi merilniki zasuka koles (enkoderji) in laserskim sensorjem razdalj (Laser Range Finder-LRF). Ko se robot vrti okoli svoje osi, se levi kolesi vrtita v obratno smer kot desni, zato kolesa zdrsavajo. Obe levi kolesi (ter obe desni kolesi) sta povezani preko jermena, zato se vrtita z enako hitrostjo. Za rešitev problema lokalizacije smo privzeli pristop z razširjenim Kalmanovim filtrom (extended Kalman filter-EKF). Predikcijski del EKF-a, ki sloni na odometriji, je izveden z uporabo enkoderjev. V korekcijskem delu EKF-a pa smo za namen zaznavanja okolja in gradnje lokalnega zemljevida uporabili senzor LRF. Zemljevid okolja je predstavljen z daljicami. Algoritem za lokalizacijo smo programirali v programskem jeziku c++ (Borland c++ Builder 5.0) in ga nato izvršili na računalniku, ki je nameščen na mobilnem robotu.



Slika 1.2: Mobilni robot Pioneer 3-AT.

2. Predikcijski del EKF-a



Slika 2.1: Koordinatni sistem (k. s.) robota (osi x_R, y_R), k. s. laserskega senzorja razdalj (LRF, osi x_L, y_L) in globalni k. s. (osi x_G, y_G).

V [13, 3, 29, 64, 2] so prikazani nekateri odometrijski modeli ter statistični modeli za vrednotenje napake odometrije. Dinamični modeli za opis gibanja robota, ki zavija z zdrsavanjem, so lahko računsko preveč potratni za namen lokalizacije v realnem času [37]. Predikcija lege robota je tukaj izvedena s simulacijo diskretnega kinematičnega modela gibanja robota (odometrijski model) kot sledi.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_p(k+1) &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_p(k), \mathbf{u}(k)) : \\
 x_r(k+1) &= x_r(k) + T \frac{R}{2} (\omega_R(k) + \omega_L(k)) \cos(\varphi_r(k)), \\
 y_r(k+1) &= y_r(k) + T \frac{R}{2} (\omega_R(k) + \omega_L(k)) \sin(\varphi_r(k)), \\
 \varphi_r(k+1) &= \varphi_r(k) + T \frac{R}{L} (\omega_R(k) - \omega_L(k)).
 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Stanje $\mathbf{x}_p(k) = [x_r(k), y_r(k), \varphi_r(k)]^T$ označuje lego robota glede na globalne koordinate (slika 2.1) v časovnem trenutku k . x_R ter y_R (slika 2.1) so osi koordinatnega sistema mobilnega robota, katerega izhodišče $(x_r(k), y_r(k))$ je definirano z osjo vrtenja robota. R označuje radij koles robota, L pa označuje razdaljo med kolesoma idealnega dvokolesnega mobilnega robota, ki je kinematični ekvivalent robota Pioneer 3-AT [37], kot bo utemeljeno v nadaljevanju. T je čas med trenutkoma k in $k + 1$, ki pa ni konstanten, kot bo razloženo v nadaljevanju. $\mathbf{u}(k) = [\omega_R(k), \omega_L(k)]^T$ je vhodni vektor. $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$ označujeta kotni hitrosti levega in desnega para koles, ki sta izmerjeni z enkoderjema. V kinematičnem modelu gibanja robota sta tangencialna hitrost robota $v(k)$ ter kotna hitrost robota $\omega(k)$ izračunana iz kotnih hitrost koles robota kot sledi

$$v(k) = \frac{R}{2}(\omega_R(k) + \omega_L(k)), \quad \omega(k) = \frac{R}{L}(\omega_R(k) - \omega_L(k)). \quad (2.2)$$

Parametra kinematičnega modela R in L (2.1, 2.2) ocenimo eksperimentalno na vrednosti $R = 10.9cm$ in $L = 58.7cm$. Izmerjen oziroma tovarniško podan radij kolesa je $R = 11cm$, medtem ko razdalja med levim in desnim parom koles znaša $40cm$. Parameter R je bil identificiran tako, da smo robota za nekaj metrov večkrat peljali naravnost ($\omega_R(k) = \omega_L(k)$). Izbrali smo tisto vrednost parametra, ki je minimizirala napaka med točno lego robota ter lego robota ocenjeno samo s kinematičnim modelom. Za referenčno oziroma točno lega robota smo vzeli kar lego robota, ki je ocenjena s pomočjo originalnega Pioneer 3-AT algoritma za lokalizacijo. Parameter L smo ocenili podobno tako, da se je robot večkrat vrtel okoli svoje osi ($\omega_R(k) = -\omega_L(k)$). Pri tem smo nastavili parameter L , tako da smo minimizirali napako med orientacijo robota ocenjeno s kinematičnim modelom ter točno orientacijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT algoritmom za lokalizacijo. S problematiko identifikacije omenjenih parametrov R in L (2.1, 2.2) ter izbiro primerne strukture kinematičnega modela gibanja mobilnega robota Pioneer 3-AT (2.1, 2.2) so se ukvarjali v delu [37], kot bo prikazano v nadaljevanju.

Naj $\omega_{Rt}(k)$ in $\omega_{Lt}(k)$ označujeta resnični kotni hitrosti levega in desnega para koles. Napaki kotnih hitrosti obeh parov koles $\omega_{Rn}(k)$ in $\omega_{Ln}(k)$ sta potem definirana kot sledi

$$\begin{aligned} \omega_L(k) &= \omega_{Lt}(k) + \omega_{Ln}(k), & \omega_R(k) &= \omega_{Rt}(k) + \omega_{Rn}(k), \\ \mathbf{n}(k) &= [\omega_{Rn}(k), \omega_{Ln}(k)]^T. \end{aligned} \quad (2.3)$$

S stališča EKF-a je vektor $\mathbf{n}(k)$ definiran kot vhodni vektor šuma, ki vpliva na spremenljivke stanja sistema $\mathbf{x}_p(k+1)$ (2.1). Vektor $\mathbf{n}(k)$ (2.3) je tukaj definiran kot vektor šuma na vhodu $\mathbf{u}(k)$, vendar pa naj ta vektor zajame negotovosti celotnega odometrijskega modela, kot bo predstavljeno v nadaljevanju. Ker uporabljamo EKF predpostavimo, da je $\mathbf{n}(k)$ vektor belega šuma z ničelnim povprečjem in Gaussovo porazdelitvijo [22, 29]. Pri izpeljavi EKF-a je prav tako predpostavljeno, da je vhodni vektor šuma $\mathbf{n}(k)$ statistično neodvisen vektor [30, 40]. To pomeni, da mora biti kovarianca $cov(\omega_{Rn}(k), \omega_{Ln}(k))$ (2.3) enaka nič oziroma, da mora biti kovariančna matrika vektorja $\mathbf{n}(k)$ diagonalna. Kovariančna matrika tega vektorja je vhodna kovariančna matrika EKF-a $\mathbf{Q}(k)$. Kako je vhodna kovariančna matrika ocenjena oziroma določena bo opisano v nadaljevanju.

Enačbe predikcijskega dela EKF-a zapišemo kot sledi.

Predikcijski del EKF-a

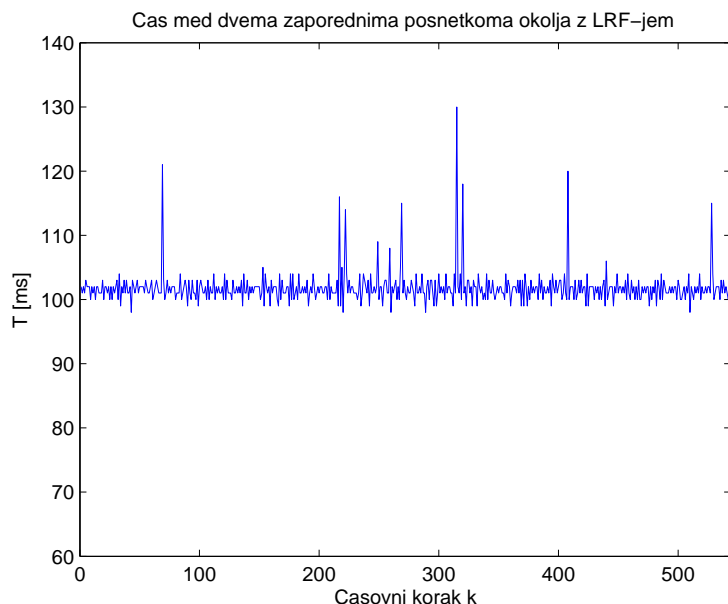
$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{x}}_p(k) &= \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1)), \\ \tilde{\mathbf{P}}(k) &= \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{P}}(k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{W}(k)\mathbf{Q}(k-1)\mathbf{W}^T(k),\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ij}(k) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{p_j}(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow \\ \mathbf{A}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T\frac{R}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)) \\ 0 & 1 & T\frac{R}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},\end{aligned}\tag{2.5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{W}_{ij}(k) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{n}_j(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow \\ \mathbf{W}(k) &= \begin{bmatrix} T\frac{R}{2} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)) & T\frac{R}{2} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)) \\ T\frac{R}{2} \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)) & T\frac{R}{2} \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)) \\ T\frac{R}{L} & -T\frac{R}{L} \end{bmatrix}.\end{aligned}\tag{2.6}$$

$\mathbf{f}(\cdot)$ (2.4) je kinematičen model gibanja robota, ki je definiran z enačbo (2.1). $\hat{\mathbf{x}}_p(k-1)$ označuje korekcijsko oceno stanja v prejšnjem časovnem trenutku $k-1$, $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$ pa označuje oceno kovariančne matrike napake korekcije. $\mathbf{Q}(k-1)$ je ocena vhodne kovariančne matrike. $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ označuje predikcijsko oceno lege robota, $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ pa oceno kovariančne matrike napake predikcije. $\mathbf{A}(k)$ je matrika

prenosov šumov iz prejšnjih ocen spremenljivk stanja $\hat{\mathbf{x}}_p(k-1)$ (2.4) na nove ocene spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$. $\mathbf{W}(k)$ pa je matrika prenosov vhodnega šuma $\mathbf{n}(k-1)$ (2.3) na ocene spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$.



Slika 2.2: Meritve časa T med dvema zaporednima posnetkoma okolja z LRF-om.

Potrebno je določiti še čas T (2.1,2.4). To je čas, ki je minil med trenutkom veljavnosti prejšnje korekcije $\hat{\mathbf{x}}_p(k-1)$ (2.4) ter med trenutkom veljavnosti tekoče predikcije $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (2.4) dobljene s simulacijo kinematičnega modela gibanja robota. Predikcijski del EKF-a naj se čim bolj približa dejanski legi robota v času veljavnosti tekoče korekcijske ocene lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$. Čas T je torej čas med trenutkom veljavnosti tekoče korekcije $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ in trenutkom veljavnosti prejšnje korekcije $\hat{\mathbf{x}}_p(k-1)$. Trenutek veljavnosti tekoče korekcijske ocene je enak trenutku, ko je bil izveden tekoči posnetek okolja z RLF-jem. Čas T je zato enak času, ki je minil med tekočim in prejšnjim posnetkom okolja z LRF-om. Vendar pa se korekcijska ocena lege robota zgodi v trenutku, ko v proces izvajanja algoritma lokalizacije prispejo tekoči podatki iz LRF-a. Trenutek prihoda podatkov iz LRF-a v proces izvajanja algoritma je zaradi časa, ki je potreben za komunikacijo računalnika s senzorjem ter za nadaljnje računalniške operacije, zakasnjjen v primerjavi s trenutkom posnetka okolja. Ta zakasnitev ni poznana, vendar ocenjujemo, da je majhna v primerjavi z dejanskim časom T . Merimo lahko le čas med trenutkoma

zadnjega ter prejšnjega prihoda podatkov iz LRF-a v proces izvajanja algoritma. Bolj kot je omenjena zakasnitev v vsakem časovnem trenutku k konstantna, bolj je izmerjena časovna razlika med dvema zaporednima posnetkoma enaka dejanskemu času T . Čas T je v našem primeru nastavljen na željeno vrednost $100ms$, meritve tega časa pa so prikazane na sliki 2.2. Morebitna odstopanja izmerjenega časa T od dejanskega časa lahko vzamemo v obzir s konzervativno oceno vhodne kovariančne matrike EKF-a $\mathbf{Q}(k)$ (2.4,2.9), ki bo definirana v nadaljevanju.

Predikcijska ocena lege robota naj čim bolj napove korekcijsko oceno, ki se zgodi, ko v računalnik na robotu prispejo podatki iz senzorja LRF. Zato predikcijo izvršimo tik pred korekcijo. Za vhod v kinematičen model gibanja robota $\mathbf{u}(k-1)$ (2.1, 2.5) pa vzamemo zadnji meritvi kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_R(k)$ in $\omega_L(k)$, ki sta prispeli v računalnik.

2.1 Vhodna kovariančna matrike EKF-a

Ko se robot pelje z določeno kotno in tangencialno hitrostjo, se napaka ocene lege robota, ki je dobljena le s simulacijo odometrijskega modela (2.1), akumulira oziroma sešteva. Ta napaka izhaja iz netočne strukture kinematičnega modela gibanja robota (2.1), netočne ocene parametrov kinematičnega modela R , L in T , zdrsanja koles robota ter napake pri merjenju kotne hitrosti koles z enkoderjema.

Obravnavajmo merilno napako, ki izhaja iz ločljivosti enkoderjev. Kolesa na mobilnem robotu Pioneer 3-AT so opremljena s štiri kvadrantnimi "500 tik" enkoderji. Če predpostavimo, da se robot v najslabšem primeru zmoti za 1 *tik*, obravnavana napaka znaša $(2\pi * rd) / (4 * 500tikov * 49.8) = 6.3 * 10^{-5} rd / tik = 0.0036^\circ / tik$, kjer 49.8 predstavlja prenosno razmerje med vrtenjem koles robota in vrtenjem enkoderja. To pomeni, da en tik na enkoderju ustreza rotaciji kolesa robota za 0.0036° , oziroma ločljivost enkoderjev znaša 0.0036° . Če je število tikov iz enkoderjev zabeleženo vsakih $T_e = 0.01s$, potem napaka na kotnih hitrostih koles robota, ki izhaja iz ločljivosti enkoderjev, v najslabšem primeru znaša $(6.3 * 10^{-5} rd) / 0.01s = 6.3 * 10^{-3} rd/s = 0.36^\circ/s$. Če se robot pelje naravnost s konstantno hitrostjo ($\omega_L(k) = \omega_R(k) = \omega_{konst}$) in je njegova orientacija ves čas enaka $\varphi_r(k+1) = \varphi_r(k) = \frac{\pi}{2}$, potem lahko položaj robota v

trenutku kT lahko opišemo z enačbo $y_r(k) = kT * R * \omega_{konst} + y_r(0)$. Predpostavimo, da je začetni položaj robota enak nič $y_r(0) = 0$. Naj bo kotna hitrost koles robota enaka $\omega_{konst} = 3.6rd/s$, kar ustreza tangencialni hitrosti robota $v_{konst} = R * \omega_{konst} = 0.39m/s$. V času $kT_e = 555 * 0.01s = 5.5s$ je položaj robota $y_r(555) = kT_e * R * \omega_{konst} = 5.5s * 0.109m * 3.6rd/s = 2.16m$. Napaka lege robota zaradi ločljivosti enkoderjev pa v najslabšem primeru v znaša $e_r(k) = kT_e * R * 6.3 * 10^{-3}rd/s = 5.5s * 0.109m * 6.3 * 10^{-3}rd/s = 4mm$. Tukaj smo predpostavili ekstremen primer, da se ob vsakem beleženju števila tikov zmotimo za en tik. Ko smo robota peljali naravnost s podobno hitrostjo, je bila razlika med lego robota ocenjeno z odometrijo (2.1, 2.2) ter lego ocenjeno z original Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom reda $5mm$.

Pri izpeljavi Kalmanovega filtra je predpostavljeno, da je vhodni vektor napake $\mathbf{n}(k)$ (2.3) statistično neodvisen vektor belega šuma z ničelnim povprečjem ter z Gaussovo porazdelitvijo. To je stroga omejitev, ki si ji je v praksi težko približati, kar še posebej velja za beli šum, ki se v praksi sploh ne more pojaviti.

Kinematični model (2.1, 2.2) je samo približek resničnemu procesu gibanja robota. Napake pri modeliranju tega procesa povzročijo odmik (angl. offset) ocenjenih spremenljivk stanja od resničnih spremenljivk stanja. Ta odmik pa ni naključni šum z ničelnim povprečjem in prav tako ni beli šum z Gaussovo porazdelitvijo. V tem odstavku iz vira [30] povzemimo priporočilo kako izbrati vhodno kovariančno matriko EKF-a $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.4), tako da ocenjena kovariančna matrika predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4) ostane konsistentna tudi v primeru napak pri modeliranju gibanja robota. Za zagotovitev konsistence moramo vrednosti matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ izbrati tako, da je izpolnjen pogoj $\tilde{\mathbf{P}}(k) \geq \tilde{\tilde{\mathbf{P}}}(k)$. Ta pogoj pomeni, da je resnična negotovost predikcije $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}(k)$ manjša ali enaka ocenjeni negotovosti predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$. Če je ta pogoj izpolnjen, filter ne predpostavlja da je njegova ocena bolj točna kot je v resnici, kar naj bi bilo zelo pomembno za stabilnost filtra [30]. Oceno kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ lahko povečamo z večanjem vhodne kovariančne matrike $\mathbf{Q}(k-1)$. V [30] je matrika $\mathbf{Q}(k-1)$ definirana kot kovariančna matrika vektorja šuma, ki nastopa v celotnem procesu gibanja robota. Tam ta naključni vektor šuma vsebuje vse motnje, ki vplivajo na sistem in niso opisane deterministično. Med te motnje je všteta nemodelirana dinamika kot tudi šum, ki nastopa na vhodu v sistem. Dejanski model gibanja robota ni poznan, zato

tudi napaka pri modeliranju tega procesa z uporabo kinematičnega modela $\mathbf{f}(\cdot)$ (2.1, 2.2) ni poznana. Ker napaka pri modeliranju ni poznana, se dejanske negotovosti predikcijske ocene $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ teoretično ali brez velikega števila ponovitev enakega eksperimenta lokalizacije ne da ugotoviti.

Kot vektor šuma, ki nastopa v celotnem procesu gibanja robota bi lahko definirali vektor

$$\mathbf{p}(k) = [\omega_{Rn}(k), \omega_{Ln}(k), T_n(k), R_n(k), L_n(k)]^T, \quad (2.7)$$

kjer $\omega_{Rn}(k)$ ter $\omega_{Ln}(k)$ (2.3) predstavljata napaki pri merjenju kotnih hitrosti levega in desnega para koles z enkoderjema. $T_n(k)$ predstavlja napako pri merjenju časa T (2.1,2.4) med dvema zaporednima posnetkoma okolja z LRF-om. $R_n(k)$ (2.1,2.4) označuje napako pri ocenjevanju radija koles R , $L_n(k)$ pa napako pri ocenjevanju inverza razdalje med kolesoma kinematično ekvivalentnega idealnega dvokolesnega robota $\frac{1}{L}$ (slika 2.1). Kovariančna matrika vektorja $\mathbf{p}(k)$ je diagonalna saj napake $\omega_{Rn}(k)$, $\omega_{Ln}(k)$, $T_n(k)$, $R_n(k)$ ter $L_n(k)$ med seboj niso korelirane. Ker je vektor $\mathbf{p}(k)$ dimenzij 5×1 , je dimenzija kovariančne matrike tega vektorja $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.4) 5×5 , dimenzija matrike parcialnih odvodov $\mathbf{W}(k)$ (2.4,2.8) pa 3×5 .

Vse že omenjene vire, ki vplivajo na napačno ocenjeno lego robota, v našem delu obravnavamo, kot da se pojavijo na vhodu v proces oziroma, kot da izvirajo iz napak kotnih hitrosti levega in desnega para koles $\omega_{Rn}(k)$ in $\omega_{Ln}(k)$ (2.3). Matriko $\mathbf{Q}(k-1)$, ki je v našem primeru torej definirana kot kovariančna matrika vektorja napake na vhodu $\mathbf{n}(k)$ (2.3), pa določimo konzervativno. To pomeni, da za kovariance matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ poskušamo vzeti večje vrednosti od tistih ki povzročijo dejansko negotovost predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$. Na ta način se poveča ocena kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4) in s tem tudi stabilnost EKF-a. Ker je vhodni vektor napake $\mathbf{n}(k)$ (2.3) dimenzij 2×1 , ima kovariančna matrika $\mathbf{Q}(k-1)$ dimenzijo 2×2 , matrika parcialnih odvodov $\mathbf{W}(k)$ (2.4, 2.6) pa ima dimenzijo 3×2 .

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{ij}(k) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{p}_j(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow \\
\mathbf{W}(k) &= \begin{bmatrix} T \frac{R}{2} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), & T \frac{R}{2} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\ T \frac{R}{2} \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), & T \frac{R}{2} \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\ T \frac{R}{L}, & -T \frac{R}{L}, \\ \frac{R}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), & \\ \frac{R}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), & \\ \frac{R}{L}(\omega_R(k-1) - \omega_L(k-1)), & \\ \frac{T}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), & 0 \\ \frac{T}{2}(\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), & 0 \\ \frac{T}{L}(\omega_R(k-1) - \omega_L(k-1)), & TR(\omega_R(k-1) - \omega_L(k-1)) \end{bmatrix}. \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Kot omenjeno napake, ki izvirajo iz negotovosti odometrijskega modela ter iz negotovosti meritev kotnih hitrosti koles z enkoderji, obravnavamo kot šuma na kotnih hitrostih levega in desnega para koles $\omega_{Rn}(k)$ in $\omega_{Ln}(k)$ (2.3). Varianci šuma kotne hitrosti desnega ter levega para koles sta definirani kot $var(\omega_{Rn}(k)) = \alpha^2 \omega_R^2(k) + \delta^2$ in $var(\omega_{Ln}(k)) = \alpha^2 \omega_L^2(k) + \delta^2$, kjer sta α ter δ konstanti. S tem je definirana struktura diagonalnih členov vhodne kovariančne matrike $\mathbf{Q}(k)$ (2.9). Ta model negotovosti kotnih hitrosti koles je povzet iz [18], kjer so modelirali gibanje vozila, ki zavija kot avtomobil. Tam je predpostavljeno, da večja kot je kotna hitrost kolesa vozila, večja je napaka kotne hitrosti kolesa zaradi zdrsanja. V [33] je predlagano, da se isti model negotovosti kotnih hitrosti koles uporabi na mobilnem robotu Pioneer 3-AT, ki zavija tako, da levi par koles vrti v drugo smer kot desni par koles. Struktura diagonalnih členov vhodne kovariančne matrike $var(\omega_{Rn}(k)) = \alpha^2 \omega_R^2(k) + \delta^2$ ter $var(\omega_{Ln}(k)) = \alpha^2 \omega_L^2(k) + \delta^2$ povzroči, da večje kot so kotne hitrosti koles, večja je ocena negotovosti lege robota $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4). V našem delu smiselnost uporabe te strukture na mobilnem robotu Pioneer 3-AT utemeljujemo kot sledi. Parametri T , R in $\frac{1}{L}$ v kinematičnem modelu gibanja robota (2.1, 2.2) se množijo s kotnimi hitrostmi koles robota $\omega_R(k-1)$ ter $\omega_L(k-1)$. Torej se tudi napake teh parametrov množijo s kotnimi

hitrostmi koles in na ta način vplivajo na negotovost lege robota. Vpliv negotovosti oziroma varianc parametrov kinematičnega modela $var(T_n(k))$, $var(R_n(k))$ ter $var(L_n(k))$ na negotovost predikcijske ocene stanja (2.4) je bolj natančno razviden iz zadnjih treh stolpcev matrike parcialnih odvodov $\mathbf{W}(k)$ (2.8), v katerih nastopata kotni hitrosti levega in desnega para koles $\omega_R(k-1)$ ter $\omega_L(k-1)$. V splošnem torej velja, da večje kot so kotne hitrosti koles robota, bolj se negotovost parametrov kinematičnega modela odraža na negotovosti predikcijske ocene lege robota (2.4). Zato lahko zgoraj omenjeno strukturo diagonalnih členov vhodne kovariančne matrike EKF-a smatramo kot primerno za zajem negotovosti odometrijskega modela gibanja robota, ki izhaja iz napačno ocenjenih parametrov modela.

V kolikor bi bila vhodna kovariančna matrika $\mathbf{Q}(k)$ (2.9) definirana le s členoma $\alpha^2\omega_R^2(k)$ ter $\alpha^2\omega_L^2(k)$, bi bila ob mirovanju robota ($\omega_R = \omega_L = 0$) vhodna kovariančna matrika ničelna. To pa ni najbolj prikladno za konvergenco Kalmanovega filtra. Za povečanje stabilnosti filtra je zato omenjenima členoma prišteta konstanta $\delta^2 > 0$. Poleg tega pa v vrednost konstante δ^2 lahko vključimo tudi varianco napake kotne hitrosti ustreznega para koles, ki izhaja merilne negotovosti pripadajočega enkoderja. Za meritev kotne hitrosti levega para koles je uporabljen en enkoder in za desni par koles je uporabljen drug enkoder. Ker sta enkoderja različna sta merilni napaki obeh enkoderjev statistično neodvisni. Zato je kovarianca med šumoma na kotnih hitrostih levega in desnega para koles $cov(\omega_{Rn}(k), \omega_{Ln}(k)) = cov(\omega_{Ln}(k), \omega_{Rn}(k))$ enaka 0.

Ustrezna dimenzija ter ustrezne vrednosti elementov vhodne kovariančne matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.4) naj bi povzročile dejansko kovariančno matriko predikcijske ocene $\tilde{\mathbf{P}}(k)$. Diagonalna člena vhodna kovariančne matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.9), ki sta različna od nič, v splošnem že povzročita kovariance med spremenljivkami stanja ocenjenimi s predikcijo $(\tilde{x}_r(k), \tilde{y}_r(k), \tilde{\varphi}_r(k))$ (2.4) oziroma izven diagonalne člene matrike $\mathbf{W}(k)\mathbf{Q}(k-1)\mathbf{W}^T(k)$ (2.4), ki so različni od nič. Namesto iskanja ustrezne vrednosti kovariance $cov(\omega_{Rn}(k), \omega_{Ln}(k))$, ki izhaja iz negotovosti odometrijskega modela, to kovarianco nastavimo na vrednost 0. Hkrati pa z večanjem varianc $var(\omega_{Rn}(k)) = \alpha^2\omega_R^2(k) + \delta^2$ ter $var(\omega_{Ln}(k)) = \alpha^2\omega_L^2(k) + \delta^2$ poskušamo doseči konzervativno oceno kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4), ki zagotavlja stabilnost EKF-a. Obe varianci povečujemo z enim faktorjem α .

Vhodna kovariančna matrika EKF-a $\mathbf{Q}(k)$ (2.4) je potem definirana kot

$$\mathbf{Q}(k) = \begin{bmatrix} \alpha^2 \omega_R^2(k) + \delta^2 & 0 \\ 0 & \alpha^2 \omega_L^2(k) + \delta^2 \end{bmatrix}. \quad (2.9)$$

2.1.1 Eksperimentalno ocenjevanje vhodne kovariančne matrike EKF-a

V tem poglavju bomo podali predlog za eksperimentalno oceno parametra α , ki nastopa v vhodni kovariančni matrike EKF-a $\mathbf{Q}(k)$ (2.9). Okvirno vrednost parametra naj se oceni kot sledi.

Robota s konstantno hitrostjo za nekaj metrov peljemo naravnost v smeri globalne koordinate y_G (2.1). Pri tem njegovo lego $\tilde{y}_r(k)$ ocenimo s kinematičnim modelom (2.4)

$$\tilde{\mathbf{x}}_p(k) = \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1)), \quad (2.10)$$

ki je uporabljen v predikcijskem delu EKF-a (2.1). Negotovost te lege robota lahko glede na oceno kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4) zapišemo kot

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{P}}(k) &= \tilde{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k-1) \tilde{\mathbf{A}}(k)^T + \mathbf{W}(k) \mathbf{Q}(k-1) \mathbf{W}^T(k), \\ \tilde{\mathbf{A}}_{ij}(k) &= \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{p_j}(k-1)} |_{(\tilde{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow \\ \tilde{\mathbf{A}}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & -T \frac{R}{2} (\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \sin(\tilde{\varphi}_r(k-1)) \\ 0 & 1 & T \frac{R}{2} (\omega_R(k-1) + \omega_L(k-1)) \cos(\tilde{\varphi}_r(k-1)) \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

kjer smo negotovost lege robota $\mathbf{A}(k) \hat{\mathbf{P}}(k-1) \mathbf{A}^T(k)$ (2.4), ki izhaja iz negotovosti korekcijske ocene iz prejšnjega trenutka $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$, zamenjali z matričnim produktom $\tilde{\mathbf{A}}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k-1) \tilde{\mathbf{A}}(k)^T$. Le ta podaja negotovost lege, ki izvira iz negotovosti predikcijske ocene iz prejšnjega trenutka $\tilde{\mathbf{P}}(k-1)$. Ker se robot ves čas pelje naravnost približno v smeri koordinate y_G velja, da je hitrost levega para koles enaka hitrosti desnega para koles $\omega_R(k-1) = \omega_L(k-1)$ ter da je orientacija robota konstantna in približno enaka $\tilde{\varphi}_r(k) = \tilde{\varphi}_r(k-1) = \frac{\pi}{2}$. Z upoštevanjem teh relacij lahko negotovost lege robota v smeri koordinate y_G zapišemo kot

$$\text{var}(\tilde{y}_r(k)) = \text{var}(\tilde{y}_r(k-1)) + \frac{T^2 R^2}{2} (\alpha^2 \omega_R^2(k-1) + \delta^2). \quad (2.12)$$

V prvem časovnem trenutku $k-1=0$ je lega robota glede na globalni koordinatni sistem definirana kot $(\tilde{x}_r(0), \tilde{y}_r(0), \tilde{\varphi}_r(0)) = (0, 0, \frac{\pi}{2})$. V trenutku $k-1=0$ koordinatni sistem robota ter globalni koordinatni sistem torej sovpadata. Na ta način je lega globalnega koordinatnega sistem v prostoru definirana z lego robota v prostoru v trenutku $k-1=0$. Koordinatni sistem robota bomo v nadaljevanju imenovali tudi lokalni koordinatni sistem. Ker v trenutku $k-1=0$ lokalni ter globalni koordinatni sistem po definiciji sovpadata, je kovariančna matrika predikcijske ocene lege robota v tem trenutku $\tilde{\mathbf{P}}(0)$ enaka ničelni matriki. Začetna negotovost lege robota v smeri koordinate y_G je torej enaka $var(\tilde{y}_r(0)) = 0$. Kot že omenjeno se izmerjen čas T (2.1, 2.12) med dvema zaporednima posnetkoma okoliža z LRF-om spreminja (slika 2.2). Za namen iskanja grobe ocene parametra α , ki povzroči konzervativno oceno kovariančne matrike $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4), predpostavimo, da je ta čas konstanten $T = 0.1s$. Če upoštevamo tudi, da je pri konstantni hitrosti robota konstantna tudi kotna hitrost koles robota $\omega_R(k) = \omega_R(k-1) = \omega_R$, lahko negotovost lege robota zapišemo kot

$$var(\tilde{y}_r(k)) = k \frac{T^2 R^2}{2} \alpha^2 \omega_R^2 + k \frac{T^2 R^2}{2} \delta^2. \quad (2.13)$$

Iz zgornje enačbe pa sledi naslednja relacija med parametrom α in negotovostjo lege robota v smeri koordinate y_G

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{k * T * R * \omega_R}} \sqrt{var(\tilde{y}_r(k)) - k \frac{T^2 R^2}{2} \delta^2}. \quad (2.14)$$

Da bi s pomočjo zgornje enačbe ocenili parameter α , moramo torej poznati le še negotovost lege robota $var(\tilde{y}_r(k))$, potem ko se je le ta v k časovnih korakih peljal naravnost s konstantno hitrostjo. Standardno deviacijo $std(\tilde{y}_r(k))$ lahko ocenimo eksperimentalno. Robota peljemo s konstantno hitrostjo naravnost ter po k časovnih korakih zabeležimo razliko $\Delta y_{r,i}(k)$ med lego robota ocenjeno s kinematičnim modelom $\tilde{y}_{r,i}(k)$ (2.1) ter referenčno lego robota ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom $y_{r,i}(k)$. Ta postopek N -krat ponovimo, pri čemer robota vsakič peljemo z isto konstantno hitrostjo, razliko $\Delta y_{r,i}(k)$ pa vsakič odčitamo pri istem številu časovnih korakov k . Sedaj lahko varianco lege robota $var(\tilde{y}_r(k))$ ocenimo kot sledi

$$var(\tilde{y}_r(k)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta y_{r,i}(k))^2, \quad \Delta y_{r,i}(k) = \tilde{y}_{r,i}(k) - y_{r,i}(k). \quad (2.15)$$

Parameter α ocenjen z enačbo (2.14) ustreza le eni konstantni hitrosti robota oziroma konstantni kotni hitrosti koles robota $\omega_R = \omega_L$, pri kateri je bil izveden

eksperiment za ocenjevanje dotičnega parametra. Zato parameter α (2.9) na isti način ocenimo tudi pri drugih konstantnih hitrostih robota, od najnižjih do največjih.

Parameter α ocenimo na podoben način tudi, ko se robot vrti s konstantno kotno hitrostjo $\omega(k)$ (2.1) okoli svoje osi. Orientacijo robota prav tako ocenimo s kinematičnim modelom (2.10, 2.1). Negotovost ocenjene lege robota pa je opisana z enačbo (2.11). Ker je hitrost desnega para koles približno enaka negativni hitrosti levega para koles $\omega_R(k-1) = -\omega_L(k-1)$, se robot vrti približno okoli svoje osi. Tangencialna hitrost robota (2.2) je zato približno enaka $v(k) = 0m/s$, posledično pa je tudi pozicija robota (2.1) približno enaka $(x_r(k), y_r(k)) = (0m, 0m)$. Negotovost lege oziroma orientacije robota lahko sedaj zapišemo kot

$$var(\tilde{\varphi}_r(k)) = var(\tilde{\varphi}_r(k-1)) + \frac{2T^2R^2}{L^2}(\alpha^2\omega_R^2(k-1) + \delta^2). \quad (2.16)$$

Kot že omenjeno je začetna negotovost orientacije robota enaka $var(\tilde{y}_r(0)) = 0$, za čas T pa smo predpostavili da je konstanten $T = 0.1s$. Ko upoštevamo še, da je pri konstantni kotni hitrosti robota konstantna tudi kotna hitrost koles robota $\omega_R(k) = \omega_R(k-1) = \omega_R$, lahko varianco orientacije zapišemo kot

$$var(\tilde{\varphi}_r(k)) = k\frac{2T^2R^2}{L^2}\alpha^2\omega_R^2 + k\frac{2T^2R^2}{L^2}\delta^2. \quad (2.17)$$

Iz zgornje enačbe izpeljemo naslednjo zvezo med parametrom α in standardno deviacijo orientacije robota

$$\alpha = \frac{L}{\sqrt{2}\sqrt{k}T R \omega_R} \sqrt{var(\tilde{\varphi}_r(k)) - k\frac{2T^2R^2}{L^2}\delta^2}. \quad (2.18)$$

Oceniti je potrebno le še negotovost orientacije robota $var(\tilde{\varphi}_r(k))$, potem ko se je le ta v k časovnih korakih vrtel okoli svoje osi s konstantno kotno hitrostjo. Robota vrtimo s konstantno kotno hitrostjo in po k časovnih korakih zabeležimo razliko $\Delta\varphi_{r,i}(k)$ med orientacijo robota ocenjeno s kinematičnim modelom $\tilde{\varphi}_{r,i}(k)$ (2.1) ter referenčno orientacijo robota ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom $\varphi_{r,i}(k)$. Ta postopek N -krat ponovimo in pri vsakem poskus robota vrtimo z isto kotno hitrostjo, razliko $\Delta\varphi_{r,i}(k)$ pa vsakič zabeležimo pri istem številu časovnih korakov k . Negotovost orientacije robota lahko sedaj ocenimo kot sledi

$$var(\tilde{\varphi}_r(k)) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\Delta\varphi_{r,i}(k))^2, \quad \Delta\varphi_{r,i}(k) = \tilde{\varphi}_{r,i}(k) - \varphi_{r,i}(k). \quad (2.19)$$

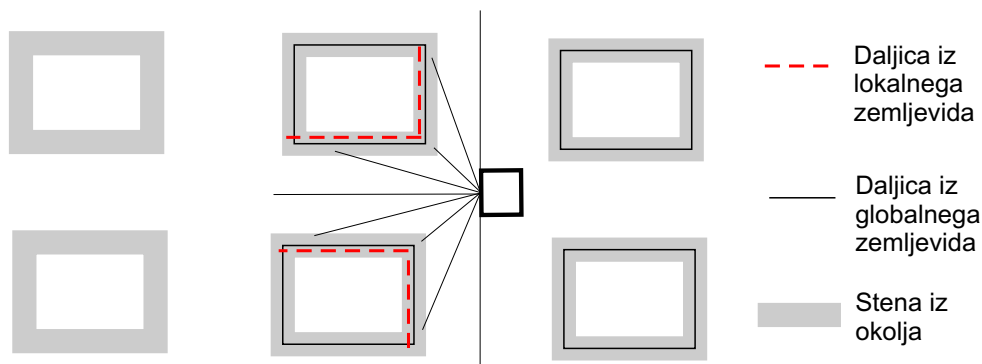
Parameter α je določen z enačbo (2.18) in pripada le eni konstantni kotni hitrosti vrtenja robota oziroma konstantnim kotnim hitrostim koles robota $\omega_R = -\omega_L$, pri katerih je bil izvršen eksperiment za ocenjevanje tega parametra. Konstanto α (2.9) zato na isti način ocenimo eksperimentalno tudi pri ostalih konstantnih kotnih hitrostih vrtenja robota, od najnižjih do največjih.

Za grobo oceno parametra α , ki povzroči konzervativno oceno kovariančne matrike $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4), lahko izberemo tisto vrednost, ki je večja ali enaka največji izmed vseh eksperimentalno ocenjenih vrednosti tega parametra. Pri tem v obzir vzamemo vrednosti parametra α ocenjene eksperimentalno tako v primeru, ko se je robot vozil naravnost s konstantno hitrostjo, kot tudi v primeru vrtenja robota okoli svoje osi s konstanto kotno hitrostjo.

Podali smo torej predlog za grobo oceno parametra α . Zaradi velikega števila eksperimentov smo konstanto α ocenili hitreje, tako da smo negotovosti $var(\tilde{y}_r(k))$ ter $var(\tilde{\varphi}_r(k))$ v enačbah (2.18, 2.14) zamenjali kar s kvadratom napake lege robota $(\Delta y_r(k))^2$ in kvadratom napake orientacije $(\Delta \varphi_r(k))^2$, ki pa sta rezultat le enega in ne N ponovitev poskusa kot v (2.15, 2.19). Pri vsaki konstantni hitrosti gibanja robota naravnost ter pri vsaki konstantni kotni hitrosti vrtenja robota smo torej za ocenjevanje parametra α izvedli le en eksperiment. Tangencialno ter kotno hitrost robota smo večali od najmanjše ($0.06m/s$ ter $4^\circ/s$) do največje ($0.7m/s$ ter $86^\circ/s$). Pri vsakem eksperimentu smo kvadratni napaki $(\Delta y_r(k))^2$ in $(\Delta \varphi_r(k))^2$ zabeležili prid drugačnem številu časovnih korakov k . Parameter δ v vhodni kovariančni matriki $\mathbf{Q}(k)$ (2.9, 2.14, 2.18) smo nastavili na vrednost 0.001. Pri izračunavanju vrednosti konstant α smo v enačbah (2.14) ter (2.18) uporabili vrednosti parametrov kinematičnega modela $R = 10.9cm$ in $L = 58.7cm$ (2.1, 2.2), ki smo ju ocenili eksperimentalno. Iz dobljenih vrednosti parametra α smo za konzervativno oceno izbrali približno območje vrednosti $\alpha \geq 0.12$.

3. Korekcijski del EKF-a

Lega robota dobljena v predikcijskem delu EKF-a je v korekcijskem delu izboljšana z minimizacijo razlike med parametri daljic iz lokalnega in parametri daljic iz globalnega zemljevida okolja (slika 3.1), ki so pretvorjeni glede na koordinate robota. Globalen zemljevid okolja je predstavljen z množico daljic in je zgrajen pred procesom lokalizacije oziroma je podan vnaprej. Robot v procesu lokalizacije iz vsakega trenutnega posnetka okolja z LRF-om zgradi lokalni zemljevid okolja, ki je prav tako sestavljen iz množice daljic.



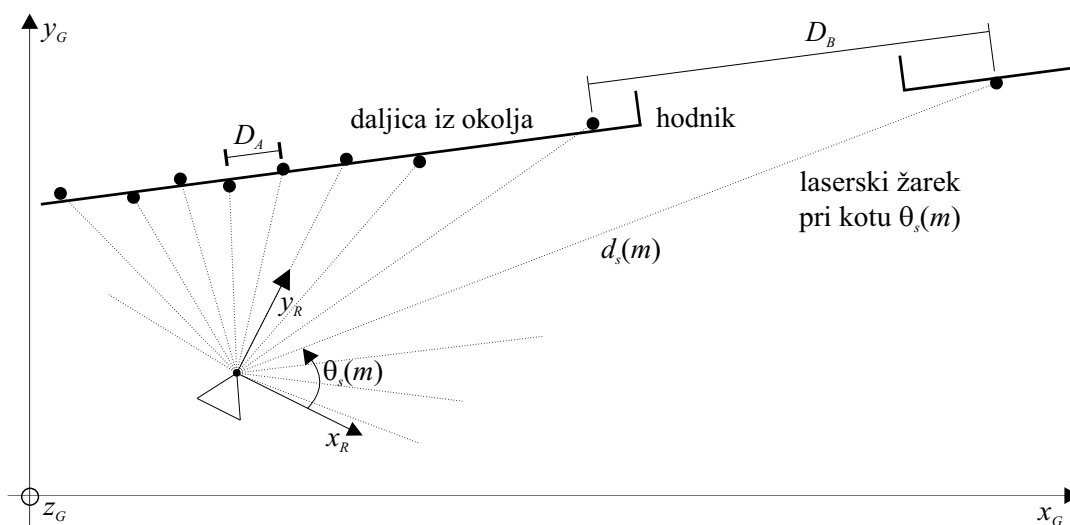
Slika 3.1: Globalen ter lokalni zemljevid okolja sta sestavljena iz daljic.

Daljice so ocenjene iz odbojnih točk laserskega senzorja razdalj. Senzor LRF pri vsakem posnetku okolja (Slika 3.2) vrne množico razdalj $\mathbf{d}_s = [d_{s0^\circ}, \dots, d_{s180^\circ}]$ do objektov (npr. stena) pri kotih laserskih žarkov $\theta_s = [0^\circ, \dots, 180^\circ]$.

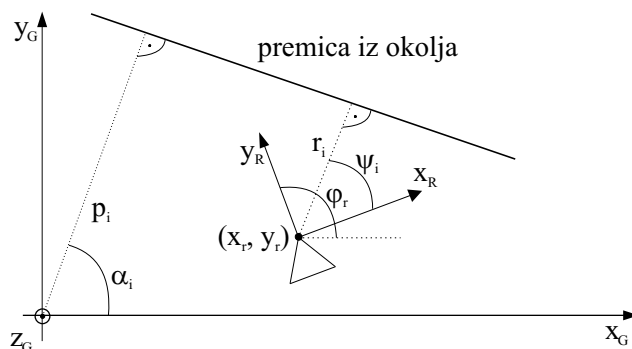
Globalni zemljevid okolja je sestavljen iz množice daljic, ki so opisane z robnimi točkami in parametri α_i in p_i (Slika 3.3) normalne enačbe premice

$$x_G \cos \alpha_i + y_G \sin \alpha_i = p_i, \quad (3.1)$$

ki je definirana glede na globalne koordinate x_G in y_G . Daljice iz trenutnega posnetka okolja sestavljajo lokalni zemljevid okolja in so opisane z robnimi točkami



Slika 3.2: Točke odboja laserskih žarkov pripadajo segmentom v okolju (npr. stena). Razdalja med dvema zaporednima točkama je lahko velika (D_B), če je kot med laserskim žarkom ter steno majhen (problem vidljivosti).



Slika 3.3: Parametra premice (p_i, α_i) glede na globalne koordinate in parametra premice (r_i, ψ_i) glede na koordinate robota.

ter parametri ψ_i in r_i (slika 3.3) normalne enačbe premice, ki je definirana glede na koordinate robota x_R in y_R

$$x_R \cos \psi_i + y_R \sin \psi_i = r_i. \quad (3.2)$$

Za namen lokalizacije je potrebno poiskati daljice iz globalnega zemljevida, ki ustrezajo istim segmentom v okolju (npr., stena) kot daljice iz lokalnega zemljevida. Strategija za iskanje parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida je prikazana v naslednjem poglavju. Parametri vseh N daljic iz lokal-

nega zemljevida ψ_i ter r_i , ki imajo svoj par v globalnem zemljevidu, so zbrani v vektorju $\mathbf{z}(k)$

$$\mathbf{z}(k) = [r_1, \psi_1, \dots, r_N, \psi_N]^T. \quad (3.3)$$

Vektor $\mathbf{z}(k)$ (3.3) tako kot v delu [22] predstavlja observacijo okolja in ga smatramo kot izhod procesa gibanja robota. Ta vektor hkrati predstavlja vhod v korekcijski del EKF-a, kjer je uporabljen za izboljšanje predikcijske ocene lege robota.

Parametra p_j in α_j daljice iz globalnega zemljevida, ki je skladna z daljico iz lokalnega zemljevida s parametroma r_i in ψ_i , sta pretvorjena v parametra \hat{r}_i in $\hat{\psi}_i$ glede na koordinate robota kot sledi

$$C_j = p_j - \tilde{x}_r(k) \cos \alpha_j - \tilde{y}_r(k) \sin \alpha_j, \\ \begin{bmatrix} \hat{r}_i \\ \hat{\psi}_i \end{bmatrix} = \mu_i(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), p_j, \alpha_j) = \begin{bmatrix} |C_j| \\ \alpha_j - (\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + (1 - \text{sign}(C_j)) \cdot \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}. \quad (3.4)$$

Oznaka $|\cdot|$ (3.4) predstavlja operacijo absolutne vrednosti. Tukaj je potrebno poudariti, da smo parametra globalne premice pretvorili (3.4) glede na koordinate robota, ki so definirane s predikcijsko oceno lege robota $\tilde{\mathbf{x}}_p(k) = (\tilde{x}_r(k), \tilde{y}_r(k), \tilde{\varphi}_r(k))$ (2.4). Model izhoda procesa $\mathbf{z}(k)$ (3.3) oziroma observacijski model procesa je potem tako kot v [22] definiran z vektorjem

$$\mu(\mathbf{x}_p(k)) = [\mu_1(\mathbf{x}_p(k), p_1, \alpha_1)^T, \dots, \mu_N(\mathbf{x}_p(k), p_N, \alpha_N)^T]^T. \quad (3.5)$$

Korekcijski del EKF – a

$$\hat{\mathbf{x}}_p(k) = \tilde{\mathbf{x}}_p(k) + \mathbf{K}(k)(\mathbf{z}(k) - \mu(\tilde{\mathbf{x}}_p(k))), \quad (3.6)$$

$$\mathbf{K}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) (\mathbf{H}(k) * \tilde{\mathbf{P}}(k) \mathbf{H}^T(k) + \mathbf{R}(k))^{-1},$$

$$\hat{\mathbf{P}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k) - \mathbf{K}(k) \mathbf{H}(k) \tilde{\mathbf{P}}(k), \quad \mathbf{H}_{ij}(k) = \frac{\partial \mu_i}{\partial \tilde{x}_{p_j}(k)} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_p(k) \Rightarrow}$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} -c_1 \cos(\alpha_1) & -c_1 \sin(\alpha_1) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -c_N \cos(\alpha_N) & -c_N \sin(\alpha_N) & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

c_i zgoraj je okrajšava za $\text{sign}(Ci)$. $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (3.7) označuje korekcijsko oceno lege robota, $\hat{\mathbf{P}}(k)$ pa kovariančno matriko napake korekcijske ocene stanja. Matrika $\mathbf{H}(k)$ (3.7) je podobno kot v delu [22] matrika prenosov šumov iz predikcijskih ocen spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (2.4) na pretvorjene parametre premic $[\hat{r}_i, \hat{\psi}_i]^T$, $i = 1, \dots, N$ (3.4). Tukaj poudarimo, da so tudi parametri premic iz globalnega zemljevida (p_j, α_j) (3.4) ocenjeni z določeno napako. Ta napaka dodatno vpliva na negotovost pretvorjenih parametrov $[\hat{r}_i, \hat{\psi}_i]^T$ (3.4), ki sestavljajo vektor observacijskega modela $\mu(\mathbf{x}_p(k))$ (3.5). Napake parametrov vektorja $\mu(\mathbf{x}_p(k))$ pa vplivajo na napako korekcijske ocene lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (3.6). V našem primeru vpliv negotovosti parametrov premic iz globalnega zemljevida na negotovost lege robota nismo upoštevali.

V kolikor v aktualnem časovnem koraku k robot ne najde nobenega para skladnih daljic iz globalnega ter lokalnega zemljevida okolja, korekcijski del EKF-a ne more biti izvršen. Zato se v tem primeru v naslednjem časovnem koraku $k+1$ predikcija izvrši na osnovi zadnje izvršene predikcije $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (2.4). Napredujmo po času za en korak, tako da $k+1$ in k postaneta k ter $k-1$. Lego robota ocenimo s kinematičnim modelom gibanja robota (2.10), v katerem je namesto zadnje korekcijske ocene lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k-1)$ (2.4) uporabljena zadnja predikcijska ocena lege robota $\tilde{\mathbf{x}}_p(k-1)$. Negotovost ocenjene lege robota pa je opisana z enačbo (2.11).

Pri uporabi EKF-a za namen lokalizacije mobilnega robota šum, ki izhaja iz meritev razdalj in kotov z LRF-om, vpliva na ocenjene parametre premic iz lokalnega zemljevida $\mathbf{z}(k)$ (3.3). Definirajmo izhodni vektor šuma kot

$$\mathbf{z}(k) = \mathbf{z}_t(k) + \mathbf{z}_n(k) : \quad (3.8)$$

$$[r_1, \psi_1, \dots, r_N, \psi_N]^T = [r_{t_1}, \psi_{t_1}, \dots, r_{t_N}, \psi_{t_N}]^T + [r_{n_1}, \psi_{n_1}, \dots, r_{n_N}, \psi_{n_N}]^T,$$

kjer vektor $\mathbf{z}_t(k)$ ustreza resničnim parametrom premic oziroma dejanskim parametrom ravnih segmentov iz okolja (npr., stena), vektor $\mathbf{z}_n(k)$ pa označuje šum oziroma napako ocenjenih parametrov. Pri izpeljavi EKF-a je predpostavljeno, da je izhodni vektor šuma $\mathbf{z}_n(k)$ statistično neodvisen vektor [30, 40]. To pomeni da morajo biti kovariance med vsemi elementi vektorja $\mathbf{z}_n(k)$ enake nič oziroma, da mora biti kovariančna matrika tega vektorja diagonalna. Kovariančno matriko izhodnega vektorja šuma $\mathbf{z}_n(k)$ imenujemo tudi izhodna kovariančna matrika EKF-a $\mathbf{R}(k)$. Vendar pa ima v našem primeru matrika $\mathbf{R}(k)$ (3.9) bločno-diagonalno

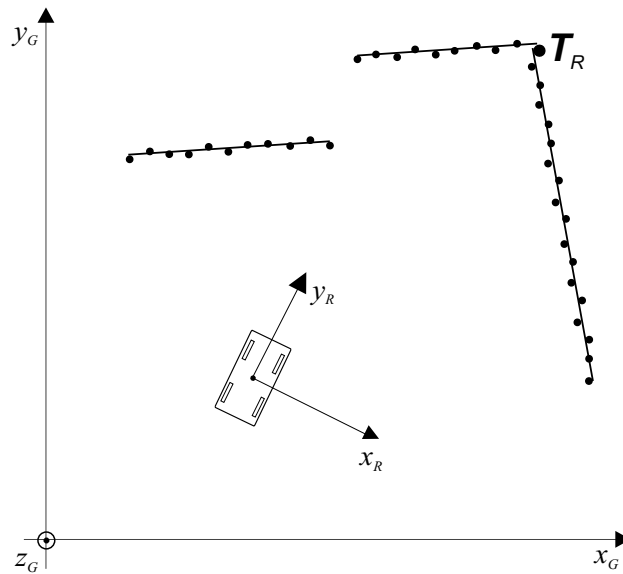
strukturo (glej tudi [22]), kar je v nasprotju s prej omenjeno predpostavko.

$$\mathbf{R}(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1(k) & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \mathbf{R}_i(k) & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{R}_N(k) \end{bmatrix}. \quad (3.9)$$

V matriki $\mathbf{R}(k)$ (3.9) i -ti blok

$$\mathbf{R}_i(k) = \begin{bmatrix} \text{var}(r_i) & \text{cov}(r_i, \psi_i) \\ \text{cov}(\psi_i, r_i) & \text{var}(\psi_i) \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

predstavlja kovariančno matriko obeh parametrov normalne enačbe premice (r_i, ψ_i) (3.2). Razlog, da obstajajo izven-diagonalni členi izhodne kovariančne matrike $\mathbf{R}(k)$ (3.9), ki so različni od nič, je, da kovarianca med parametroma iste premice $\text{cov}(\psi_i, r_i)$ (3.10) v splošnem ni enaka nič.



Slika 3.4: Točke, ki ustrezajo daljicam. Robna točka \mathbf{T}_R pripada obema sosednjima daljicama.

Predpostavimo, da meritve različnih odbojnih točk LRF-a $(\mathbf{d}_s(i), \theta_s(i))$ ter $(\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j))$, $i \neq j$ med seboj niso korelirane [22]. Parametri vsake premice so izračunani iz določene množice točk, ki ustrezajo daljicam v okolju. Robna točka \mathbf{T}_R med dvema zaporednima daljicama (slika 3.4) pripada obema daljicama. Za

vse ostale točke velja, da pripadajo le eni daljici in nobeni drugi. Če so parametri premic r_i in ψ_i izračunani iz različnih množic točk, med ocenjenimi parametri različnih premic ni korelacije. Če pa so parametri sosednjih premic izračunani iz množic točk, ki imajo skupno robno točko \mathbf{T}_R , korelacijo med ocenjenimi parametri različnih premic zanemarimo. Zato smo v matriki $\mathbf{R}(k)$ (3.9) kovariance izven-diagonalnih blokov $\mathbf{R}_i(k)$ ($i = 1, \dots, N$) nastavili na vrednost 0.

V nadaljevanju bomo predstavili postopek za ocenjevanje parametrov premic (r_i, ψ_i) (3.2), ki izhaja iz metode najmanjših kvadratov (ang. Least Squares-LSQ). Na osnovi najmanjših kvadratov pa bomo predlagali tudi metodo za ocenjevanje kovarianc obeh parametrov premic (r_i, ψ_i) (3.10).

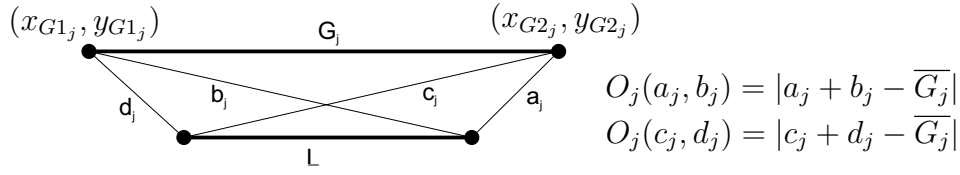
3.1 Primerjanje daljic iz globalnega in lokalnega zemljevida

Za izvršitev korekcijskega dela EKF-a je potrebno poiskati pare daljic iz globalnega in lokalnega zemljevida, ki pripadajo istim segmentom v okolju (npr., stena) [2, 22, 46]. Skladne pare smo poiskali kot sledi. Vsaka daljica iz lokalnega zemljevida je primerjana z vsemi daljicami iz globalnega zemljevida, ki so pretvorjene v koordinate robota glede na predikcijsko oceno lege robota $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (2.4). Daljica L iz lokalnega zemljevida ima parametra premice r ter ψ (3.2), globalne daljice G_j ($j = 1, \dots, n_G$), ki so z relacijo (3.4) pretvorjene v koordinate robota, pa imajo parametre premice $(\hat{r}_j, \hat{\psi}_j)$. Koordinate robnih točk globalnih daljic (x_{Q1_j}, y_{Q1_j}) ter (x_{Q2_j}, y_{Q2_j}) so pretvorjene v lokalne koordinate (x_{G1_j}, y_{G1_j}) ter (x_{G2_j}, y_{G2_j}) (Slika 3.5) z naslednjo relacijo

$$\begin{aligned} x_{G1_j} &= (x_{Q1_j} - \tilde{x}_r(k)) * \cos(\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + \\ &\quad + (y_{Q1_j} - \tilde{y}_r(k)) * \sin(\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}), \\ y_{G1_j} &= -(x_{Q1_j} - \tilde{x}_r(k)) * \sin(\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + \\ &\quad + (y_{Q1_j} - \tilde{y}_r(k)) * \cos(\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}), \end{aligned} \tag{3.11}$$

kjer $\tilde{\mathbf{x}}_p(k) = (\tilde{x}_r(k), \tilde{y}_r(k), \tilde{\varphi}_r(k))$ (2.4) predstavlja predikcijsko oceno lege robota.

Globalna daljica G_S ($j = S$) je izbrana kot najbolj podobna lokalni daljici, če izpolnjuje naslednji pogoj



Slika 3.5: Stopnji prileganja $O_j(a_j, b_j)$ ter $O_j(c_j, d_j)$ med lokalno daljico L in globalno daljico G_j pretvorjeno v koordinate robota, kjer $\overline{G_j}$ označuje dolžino daljice G_j .

$$\begin{aligned} & ((r - \hat{r}_S)^2 < (r - \hat{r}_j)^2) \text{ in } ((\psi - \hat{\psi}_S)^2 < (\psi - \hat{\psi}_j)^2) \text{ in} \\ & (O_S(a_S, b_S) < O_j(a_j, b_j)) \text{ in } (O_S(c_S, d_S) < O_j(c_j, d_j)), \end{aligned} \quad (3.12)$$

$$j = 1, \dots, S - 1, S + 1, \dots, n_G,$$

kjer *in* označuje Boolov operator. $O_j(a_j, b_j)$ in $O_j(c_j, d_j)$ skupaj predstavljata stopnjo prileganja med lokalno daljico L in pretvorjeno globalno daljico G_j . a_j , b_j , c_j ter d_j (Slika 3.5) so Evklidove razdalje med robnimi točkami daljic L ter G_j . Funkcija prileganja $O_j(.,.)$ je definirana kot

$$O_j(a_j, b_j) = |a_j + b_j - \overline{G_j}|, \quad j = 1, \dots, n_G, \quad (3.13)$$

kjer $\overline{G_j}$ pomeni dolžino globalne daljice G_j . Ideja o stopnji prileganja $O_j(a_j, b_j)$ (3.13) izhaja iz trikotniške neenakosti $a_j + b_j \leq \overline{G_j}$ in je povzeta iz vira [41]. Če je stopnja prileganja med lokalno daljico ter najbolj podobno globalno daljico G_S manjša od vrednosti pragov

$$\begin{aligned} & ((r - \hat{r}_S)^2 < T_r) \text{ in } ((\psi - \hat{\psi}_S)^2 < T_\psi) \text{ in} \\ & (O_S(a_S, b_S) < T) \text{ in } (O_S(c_S, d_S) < T), \end{aligned} \quad (3.14)$$

sta daljici izbrani za skladen par. T_r, T_ψ in T so pragovi, ki so nastavljeni hevristično (npr., $T_r = 30^2 \text{cm}^2$, $T_\psi = (\frac{\pi}{6})^2 r d^2$ in $T = 30^2 \text{cm}^2$).

V delu [41] sta lokalna daljica L ter pretvorjena globalna daljica G_j definirani kot skladen par, če sta vsaj dve izmed stopenj prileganja $O_j(a_j, b_j)$, $O_j(c_j, d_j)$, $O_j(a_j, c_j)$ ter $O_j(b_j, d_j)$ (3.13) manjši od vrednosti praga. Ta kriterij je v [41] poimenovan kot binarni kriterij.

Zato prikažemo še drug način iskanja skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida. Definirajmo vrednost M_j kot vrednost druge najmanjše stopnje prileganja izmed stopenj $O_j(a_j, b_j)$, $O_j(c_j, d_j)$, $O_j(a_j, c_j)$ in $O_j(b_j, d_j)$ (3.13). Binaren kriterij skladnosti daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida, ki je povzeta

iz vira [41], lahko torej zapišemo kot sledi. Lokalno daljico L ter pretvorjeno globalno daljico G_j lahko izberemo za skladen par, če je vrednost M_j manjša od praga T

$$M_j < T. \quad (3.15)$$

Pri iskanju skladnih parov neko daljico iz globalnega zemljevida L primerjamo z vsemi daljicami iz globalnega zemljevida G_j ($j = 1, \dots, n_G$). Glede na definicijo podobnosti (3.12) ter definicijo skladnosti (3.15) zapišimo pogoj, ki ga mora izpolniti globalna daljica G_S ($j = S$), da je izbrana kot najbolj podobna lokalni daljici L .

$$\begin{aligned} & ((r - \hat{r}_S)^2 < (r - \hat{r}_j)^2) \text{ in } ((\psi - \hat{\psi}_S)^2 < (\psi - \hat{\psi}_j)^2) \text{ in } (M_S < M_j), \\ & j = 1, \dots, S - 1, S + 1, \dots, n_G. \end{aligned} \quad (3.16)$$

in (3.16) označuje Boolov operator. Lokalno daljico L ter najbolj podobno globalno daljico G_S izberemo za skladen par, če je stopnja prileganja med njima manjša od vrednosti pragov T_r, T_ψ in T

$$((r - \hat{r}_S)^2 < T_r) \text{ in } ((\psi - \hat{\psi}_S)^2 < T_\psi) \text{ in } (M_S < T). \quad (3.17)$$

3.2 Napake pri merjenju razdalj ter kotov z LRF-om

Daljice iz okolja so določene iz odbojnih točk sensorja LRF. Kot že omenjeno sensor LRF pri vsakem posnetku okolja (Slika 3.2) vrne množico razdalj $\mathbf{d}_s = [d_{s0^\circ}, \dots, d_{s180^\circ}]$ do objektov v prostoru (npr., stena) pri kotih laserskih žarkov $\theta_s = [0^\circ, \dots, 180^\circ]$. Uporabljamo laserski merilnik razdalj Sick LMS200, ki se pogosto uporablja v mobilni robotiki. Sensor LRF sestoji iz naprave za 1D merjenje razdalje z laserjem ter iz zrcala, ki laserski žarek usmeri pod kotom od 0° do 180° v ravnini. Zrcalo se vrti s konstantno hitrostjo $75Hz$. Sensor Sick LMS200 ima glede na tehnični opis [49] naslednje karakteristike. Izbrati je možno dva razpona kotov laserskih žarkov (območje vidljivosti): 100° in 180° . Resolucija kotov pa je lahko 0.25° (samo pri 100° območju vidljivosti), 0.5° in 1° , pripadajoči časi enega cikla meritev pa znašajo $53.3ms$ (samo pri 100° območju vidljivosti), $26.6ms$ in $13.33ms = 1000ms/75$. Maksimalna razdalja, ki je možno izmeriti, je $8m$ v mm-načinu in $80m$ v cm-načinu. Resolucija pri merjenju razdalje je $10mm$, tipična točnost meritve pa je $\pm 35mm$. Tipična sistematična napaka v mm-načinu je

$\pm 15mm$ v območju 1 do 8m, v cm-načinu pa $\pm 40mm$ v območju 1 do 20m. V mm-načinu je v območju $\leq 8m$ tipična statistična napaka 5mm.

Ko se robot med snemanjem okolja pelje po prostoru, premikanje robota povzroči popačenje meritev razdalj ter kotov odbojnih točk, saj se meritve razdalj pri vseh kotih laserskega žarka $0^\circ, 1^\circ, \dots, 180^\circ$ na zgodijo v trenutku pač pa v času $13.333ms/2 = 6.67ms$. $13.333ms$ je čas obrata zrcala za cel krog, $6.67ms$ pa je čas obrata za pol kroga, v katerem se izvršijo meritve razdalj pri kotih žarkov 0° do 180° . Efekt popačenja meritev ni zanemarljiv pri majhnih hitrostih vrtenja zrcala žarkov. V [4] je uporabljen senzor LRF z manjšo hitrostjo vrtenja zrcala, zato se vsak nov posnetek okolja z LRF-om sprotno kompenzira iz odometrijskih meritev. V [44] je predpostavljeno, da je pri uporabi laserskega merilnika razdalj SICK LMS200 efekt popačenja meritev zaradi velike hitrosti zrcala ($75Hz$) zanemarljiv. Vendar pa naj bi bila ta predpostavka upravičena le, ko se robot premika z majhno tangencialno in kotno hitrostjo [44], npr. nekaj metrov na sekundo.

Obravnavajmo napako na meritvah razdalj $\mathbf{d}_s(i)$ ter kotov $\theta_s(i)$, ki izhajajo iz gibanja robota ter vrtenja zrcala LRF-a s frekvenco $75Hz$. Predpostavimo najprej, da se robot vrti okoli svoje osi s kotno hitrostjo (2.2) $\omega(k) = 86^\circ/s$ v isti smeri kot se vrti zrcalo LRF-a. V času preleta laserskega žarka 0° do 180° se robot zavrti za $0.57^\circ = 86^\circ/s * 6.67ms$. To pomeni, da dejanska razlika med kotom zadnjega in prvega žarka ne znaša 180° pač pa 180.57° . Sedaj pa predpostavimo, da se robot pelje naravnost s tangencialno hitrostjo (2.2) $v(k) = 0.7m/s$. V času meritev razdalj pri kotih žarka 0° do 180° se robot premakne za $0.47cm = 0.7m/s * 6.67ms$, kar seveda vpliva na napačno izmerjene razdalje. Vrtenje zrcala LRF-a s končno kotno hitrostjo ne vpliva na meritve razdalj ter kotov obojnih točk, če robot miruje.

Glede na zadnji meritvi kotnih hitrosti koles robota $\omega_R(k-1)$ ter $\omega_L(k-1)$ bi lahko s pomočjo kinematičnega modela gibanja robota (2.1) ocenili, kje v prostoru se je nahajal robot v času izvedbe meritve razdalje pri i -tem ($i = 1, \dots, 181$) kotu žarka relativno glede na lego robota v trenutku meritve razdalje s prvim žarkom. Ker se zrcalo vrti s konstantno hitrostjo, je časovna razlika med trenutkom meritve razdalje z i -tim žarkom (kot $(i-1)^\circ$) ter prvim žarkom (kot 0°) enaka $(i-1) * 6.67ms/181$. Glede na ocenjeno lego robota v trenutku meritve pod določenim kotom žarka bi potem lahko kot v [4] za vsak žarek posebej popravili

izmerjeno razdaljo $\mathbf{d}_s(i)$ ter kot $\theta_s(i)$. Vendar pa je tukaj potrebno biti pozoren na naslednje dejstvo. Pri izpeljavi EKF-a je predpostavljeno, da vhodni šum $\mathbf{n}(k)$ (2.3) oziroma šum, ki nastopa v celotnem procesu gibanja robota $\mathbf{p}(k)$, ter izhodni šum $\mathbf{z}_n(k)$ (3.8) nista korelirana [30, 40].

Predikcija lege robota je izvedena s simulacijo kinematičnega modela gibanja robota (2.1), kjer vhod v sistem predstavljajo zadnji meritvi kotnih hitrosti koles robota $\omega_R(k-1)$ ter $\omega_L(k-1)$. Zgoraj pa smo nakazali, da bi z uporabo istega kinematičnega modela in istih meritev kotnih hitrosti koles lahko kompenzirali popačenje meritev razdalj ter kotov žarkov, ki so posledica gibanja robota ter vrtenja zrcala LRF-a s končno hitrostjo. Na osnovi popravljenih odbojnih točk LRF-a bi nato ocenili parametre daljic, ki sestavljajo izhodni vektor procesa lokalizacije $\mathbf{z}(k)$ (3.3, 3.6). Ta vektor pa je v korekcijskem delu EKF-a uporabljen za izboljšanje ocene lege robota. Na ta način pa bi napako oziroma šum, ki nastopa v celotnem procesu gibanja robota $\mathbf{p}(k)$, korelirali z izhodnim šumom $\mathbf{z}_n(k)$ (3.8), kar predstavlja kršitev zgoraj omenjene predpostavke.

Šum $\mathbf{p}(k)$ je merodajen v predikcijskem delu EKF-a, šum $\mathbf{z}_n(k)$ pa v korekcijskem delu EKF-a. Omenjeno korelacijo med šumoma bi lahko zmanjšali, če bi za ocenjevanje relativne lege robota pri vsakem posameznem trenutku, ko je izvedena meritve razdalje pod določenim kotom žarka, namesto zadnjih meritev kotnih hitrosti koles uporabili predzadnji meritvi $\omega_R(k-2)$ ter $\omega_L(k-2)$. Predpostavljamo namreč da meritvi kotne hitrosti levega in desnega kolesa v dveh zaporednih trenutkih nista korelirani ($cov(\omega_{Rn}(k-1), \omega_{Rn}(k-2)) = 0$, $cov(\omega_{Ln}(k-1), \omega_{Ln}(k-2)) = 0$). Seveda pa bi namesto predzadnjih meritev kotnih hitrosti koles lahko uporabili tudi zadnji meritvi kotnih hitrosti desnega in levega para koles $\omega_{R2}(k-1)$ ter $\omega_{L2}(k-1)$ dobljeni z uporabo drugih dveh enkoderjev, ki bi jih montirali na levo ter desno kolo robota. Naj spremenljivki $\omega_{R2n}(k-1)$ ter $\omega_{L2n}(k-1)$ predstavljata šum pri merjenju kotne hitrosti desnega ter levega para koles z uporabo dveh novih enkoderjev. Ker sta za meritve kotne hitrosti levega para koles uporabljena dva različna enkoderja, med šumoma $\omega_{Rn}(k-1)$ ter $\omega_{R2n}(k-1)$ ni korelacije ($cov(\omega_{Rn}(k-1), \omega_{R2n}(k-1)) = 0$). Enako velja za levi kolesni par ($cov(\omega_{Ln}(k-1), \omega_{L2n}(k-1)) = 0$). Vendar pa še vedno ostaja korelacija med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a $\mathbf{p}(k)$ ter $\mathbf{z}_n(k)$. Le ta izhaja iz napak pri modeliranju gibanja robota oziroma iz

netočno ocenjenih parametrov kinematičnega modela (2.1), ki je uporabljen tako v predikcijskem kot v korekcijskem delu EKF-a. V predikcijskem delu EKF-a je pri simulaciji kinematičnega modela uporabljen čas med dvema zaporednima posnetkoma okolja z LRF-om T , v korekcijskem delu pa je namesto tega časa uporabljena zgoraj definirana časovna razlika $(i - 1) * 6.67ms/181$. Napaka pri merjenju časa T in napaka časovne razlike $(i - 1) * 6.67ms/181$ med seboj nista korelirani. Oba preostala parametra R ter $\frac{1}{L}$ pa se pri simulaciji kinematičnega modela gibanja robota uporabita tako v predikcijskem kot v korekcijskem delu EKF-a. Zato še vedno obstaja korelacija med šumoma $\mathbf{p}(k)$ ter $\mathbf{z}_n(k)$, ki izvira iz napak pri ocenjevanju omenjenih parametrov $R_n(k)$ ter $L_n(k)$ (2.7). Omenjeni popravki popačenih meritev razdalj $\mathbf{d}_s(i)$ ter kotov $\theta_s(i)$ na podlagi ocenjene relativne lege robota torej povzročijo korelacijo med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a $\mathbf{p}(k)$ ter $\mathbf{z}_n(k)$. To korelacijo bi lahko vsaj malo zmanjšali, če bi namesto simetričnega kinematičnega modela (2.1, 2.2), ki smo ga uporabili v predikcijskem delu, za popravke popačenih meritev razdalj $\mathbf{d}_s(i)$ ter kotov $\theta_s(i)$ uporabili asimetrični kinematični model [37]. Struktura ter optimalni parametri asimetričnega kinematičnega modela se namreč vsaj malo razlikujejo od strukture ter optimalnih parametrov simetričnega kinematičnega modela. Asimetrični kinematični model gibanja robota bo predstavljen v nadaljevanju.

Če bi želeli ohraniti ničelno stopnjo korelacije med šumoma $\mathbf{p}(k)$ ter $\mathbf{z}_n(k)$, bi morali napačne meritve iz LRF-a zato popraviti s pomočjo ocene relativne lege robota, ki izhaja iz uporabe drugačnega odometrijskega sensorja (npr., žiroskop, pospeškometer) ter posledično drugačnega odometrijskega modela. Žiroskop nudi informacijo le o kotni hitrosti robota, ki jo je potrebno integrirati, da dobimo željeno orientacijo robota. Vendar pa se pri tem integrira tudi zamik (ang., offset) sensorja. Podobno je potrebno tudi izhod pospeškometra dvakrat integrirati, da dobimo informacijo o položaju robota. Zaradi dvakratne integracije je lega robota ocenjena iz pospeškometra še bolj podvržena napaki zaradi šuma kot žiroskop. Ocenjujemo, da bi s pomočjo žiroskopa ali pospeškometra težko dovolj natančno ocenili lego robota za namen popraviljanja popačenih meritev razdalj $\mathbf{d}_s(i)$ ter kotov $\theta_s(i)$. Za oceno relativne lege robota pa bi lahko uporabili tudi kakšen drug sensor, ki podaja informacijo iz okolja (npr., ultrazvočni senzor razdalje, stereo kamera). Vendar ocenjujemo, da bi bilo tudi s pomočjo teh dveh sensorjev dokaj težavno določiti lego robota dovolj natančno za namen popraviljanja popačenih

meritev LRF-a.

V kolikor se želimo izogniti omenjeni korelaciji med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela, lahko popačene meritve LRF-a zaradi končne hitrosti vrtenje zrcala senzorja v okviru EKF-a upoštevamo kot sledi. Za oceno parametrov premic ter njihovih kovarianc lahko uporabimo metodo ortogonalnih najmanjših kvadratov (3.23, 3.34), ki bo predstavljena v nadaljevanju. Pri tem popačene meritve LRF-a vzamemo v obzir z večanjem ocen vnaprej podanih varianc razdalj ter kotov laserskih žarkov $\sigma_{d_j}^2$ ter $\sigma_{\theta_j}^2$ (3.35). Varianci $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$ nastopata v kovariančni matriki \mathbf{C}_{m_j} (3.35) s pomočjo katere se izračunajo kovariance parametrov premic. Z večanjem varianc razdalj ter kotov laserskih žarkov $\sigma_{d_j}^2$ ter $\sigma_{\theta_j}^2$ torej vplivamo na povečanje kovarianc ocenjenih parametrov premic iz okolja.

3.3 Identifikacija parametrov premic

Daljice iz okolja so določene iz odbojnih točk senzorja LRF tako, kot je to prikazano tudi v predhodnem diplomskem delu [51]. Tam smo algoritem za določanje daljic iz okolja testirali na simulatorju, v tem delu pa bomo ta algoritem preizkusili na mobilnem robotu v realnem okolju.

Pri določanju množic točk, ki ustrezajo daljicam oziroma ravnim segmentom v okolju, je potrebno upoštevati problem vidljivosti okolja. Problem vidljivosti je prikazan na sliki 3.2. Razdalje med zaporednimi točkami odboja (D_A na sliki 3.2), pri katerih je kot med pripadajočimi laserskimi žarki ter opazovanim segmentom iz okolja blizu 90° , so zelo majhne (nekaj centimetrov). Nasprotno so razdalje med zaporednimi točkami (D_B na sliki 3.2) zelo velike (nekaj metrov), če je kot med pripadajočimi laserskimi žarki ter ravnim segmentom majhen. Ker sta sosednji točki odboja, ki ležita na isti premici iz okolja, med seboj zelo oddaljeni, je med njima veliko ne-zaznanega okolja. Tam bi na primer lahko bil začetek širokega hodnika (slika 3.2). Zato so za točke, ki pripadajo daljici, izbrane le zaporedne točke pri katerih je razdalja med dvema sosednjima točkama dovolj majhna, kot bo to prikazano v nadaljevanju.

Najprej so vse izmerjene točke iz koordinatnega sistema LRF-a (osi x_L ter y_L , slika 2.1) pretvorjene v koordinatni sistem robota (osi x_R ter y_R). Razdalja med izhodiščem koordinatnega sistema LRF-a ter izhodiščem koordinatnega sistema

robota znaša približno 15cm . Nato so vse zaporedne točke

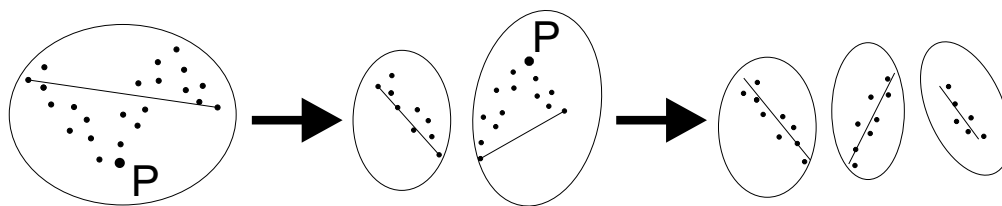
$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{posn}(m) &= \mathbf{d}_s(m) \cos \theta_s(m), \\ \mathbf{y}_{posn}(m) &= \mathbf{d}_s(m) \sin \theta_s(m), \quad m = 1, \dots, Np, \end{aligned} \quad (3.18)$$

pri katerih je prišlo do odboja žarka ($\mathbf{d}_s(m) \leq R_{LRF}$) združene v množice; preostale točke ($\mathbf{d}_s(m) > R_{LRF}$) pa so zavržene. R_{LRF} označuje doseg LRF-a (npr., 80m pri Sick LMS200). Vsaka množica točk je potem razdeljena v več množic točk, če je razdalja med dvema zaporednima točkama večja od praga T_S . Prag T_S je v določenem okolju nastavljen hevrstično glede na pričakovano najmanjšo razdaljo (npr., 15cm), ki je potrebna za razločitev med dvema različnima zaporednima daljicama oziroma ravnima segmentoma v okolju. Tukaj se upošteva že opisan problem vidljivosti, saj vsaka izmed zaporednih točk, ki ležijo na isti premici iz okolja z razdaljo med dvema sosednjima točkama večjo od praga T_S , tvori svojo množico. Množice, ki vsebujejo samo eno točko odboja, pa so zavržene v naslednjem koraku. Če je v neki množici manj kot N_{min} točk, je množica zavržena. N_{min} je minimalno število točk potrebnih za izračun parametrov daljice (npr., $N_{min} = 5$). 2 točki že definirata daljico, vendar je potrebno zaradi šuma LRF-a za zanesljivo oceno parametrov daljice iz okolja upoštevati več točk.

Vsaka množica točk $s_1 = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ je nato z algoritmom razdeli-in-zlij [45, 2, 51] razdeljena v več zaporednih množic, kjer vsaka množica točk ustreza določeni daljici oziroma ravnemu segmentu v okolju. Opišimo algoritem razdeli-in-zlij po korakih.

1. korak: Množica točk s_1 sestoji iz N točk. Vstavi s_1 v seznam L .
2. korak: Izračunaj parametre premice za naslednjo množico s_i iz seznama L . Premica je definirana z robnima točkama množice s_i .
3. korak: Določi točko P z največjo razdaljo d_P od premice.
4. korak: Če je d_P manjši od praga, nadaljaj (pojdi na 2).
5. korak: Sicer razdeli s_i pri P v s_{i1} in s_{i2} , zamenjaj s_i v L z s_{i1} in s_{i2} , nadaljaj (pojdi na 2).

Algoritem bolj nazorno opiše primer na sliki 3.6, ki ga povzemamo iz predhodnega diplomskega dela [51] kot sledi. Najprej se poišče točka P z največjo razdaljo



Slika 3.6: Grupiranje točk v množice, ki ustrezajo daljicam.

d_p . Ker je d_p večji od praga, pri točki P množico točk razdelimo na dve množici. V naslednjem koraku za obe množici poiščemo točki P . Ker je pri prvi množici razdalja d_p manjša od praga, ta množica točk že ustreza daljici. Pri drugi množici je razdalja d_p večja od praga, zato to množico razdelimo na dve množici. V naslednjem koraku za drugo in tretjo množico še ne vemo, ali ustrezata daljici. Zato za obe množici spet poiščemo točki P , in ker sta razdalji d_p manjši od praga, tudi druga in tretja množica ustrezata daljici. Tako je postopek končan, saj vse tri množice ustrezajo daljicam. Če je v določeni množici točk (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , ki ustreza daljici, manj kot N_{min} točk, je le ta zavržena. Množica točk daljice (\mathbf{x}, \mathbf{y}) je prav tako zavržena, če je dolžina daljice manjša od praga T_d (npr., $10cm$). Algoritem razdeli-in-zlij je glede na primerjavo algoritmov za določitev daljic iz posnetkov okolja narejenih z LRF-om [45] hiter in natančen. Poleg parametrov premic je z omenjenim algoritmom možno določiti tudi robne točke daljic. Parametri premic so pogosto izračunani z uporabo Hough-ovega transformata [46, 21, 48, 24], vendar je le ta računsko bolj zahteven hkrati pa rezultat algoritma ne vključuje robnih točk daljic, kar je pomembna informacija za lokalizacijo in gradnjo zemljevida okolja.

Vsaka množica točk (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , ki pripada daljici, je glede na koordinate robota reducirana v parametra normalne enačbe premice r in ψ ((3.2), slika 3.3) ter v robni točki daljice. Če množica točk (\mathbf{x}, \mathbf{y}) pripada navpični daljici, parametri premice ne morejo biti izračunani direktno po metodi najmanjših kvadratov. Razlog za to je sledeč. Rezultat metode najmanjših kvadratov sta oceni dveh parametrov eksplicitne enačbe premice. V tej obliki pa navpična premica povzroči, da gre parameter naklona premice proti neskončnosti. V izogib tej problematiki je najprej v grobem ocenjen naklon premice. Naklon je ocenjen iz robnih točk (Ta_x, Ta_y) in (Tb_x, Tb_y) množice (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . Če je absolutna vrednost naklona večja

od 1

$$|Ta_y - Tb_y| > |Ta_x - Tb_x|, \quad (3.19)$$

so tako kot v predhodnem diplomskem delu [51] vse točke iz množice (\mathbf{x}, \mathbf{y}) zavrtene za kot $-\frac{\pi}{2}$. Na ta način je ocenjevanje parametrov s pomočjo najmanjših kvadratov dobro pogojeno, saj se v najslabšem primeru ocenjuje parametra eksplisitne enačbe premice, ki ima naklon 1. Točke so zavrtene tako, da je vektor \mathbf{x} zamenjan z vektorjem \mathbf{y} , vektor \mathbf{y} pa z vektorjem $-\mathbf{x}$.

Množica točk (\mathbf{x}, \mathbf{y}) , ki pripada daljici, je nato reducirana v parametra normalne enačbe premice glede na koordinate robota r in ψ (3.2) kot sledi

$$\mathbf{y} = [\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(n)]^T, \quad \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}(1) & \dots & \mathbf{x}(n) \\ 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}^T, \quad (3.20)$$

$$\hat{\theta} = [\hat{k}_l, \hat{c}_l]^T = (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y},$$

$$\begin{aligned} r(\hat{k}_l, \hat{c}_l) &= \frac{\hat{c}_l}{\sqrt{\hat{k}_l^2 + 1}} \text{sign}(\hat{c}_l), & \psi(\hat{k}_l) &= \arctan2(\sin(\psi(\hat{k}_l)), \cos(\psi(\hat{k}_l))), \\ \sin(\psi(\hat{k}_l)) &= \frac{\text{sign}(\hat{c}_l)}{\sqrt{\hat{k}_l^2 + 1}}, & \cos(\psi(\hat{k}_l)) &= \frac{-\hat{k}_l}{\sqrt{\hat{k}_l^2 + 1}} \text{sign}(\hat{c}_l), \end{aligned} \quad (3.21)$$

kjer n označuje število točk, ki pripada daljici. \hat{k}_l in \hat{c}_l sta parametra eksplisitne enačbe premice $y_R = k_l \cdot x_R + c_l$ ocenjena z metodo navadnih najmanjših kvadratov (cLSQ-classic LSQ). Oba parametra sta potem pretvorjena v parametra normalne enačbe premice $r(\hat{k}_l, \hat{c}_l)$ in $\psi(\hat{k}_l)$ (3.21). Funkcija $\arctan2$ je štiri kvadrantna arkus tangens funkcija

$$\arctan2(y_a, x_a) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{|y_a|}{|x_a|}\right) * \text{sign}(y_a), & x_a > 0; \\ \frac{\pi}{2} * \text{sign}(y_a), & x_a = 0; \\ (\pi - \arctan\left(\frac{|y_a|}{|x_a|}\right)) * \text{sign}(y_a), & x_a < 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Če je bilo zadoščeno pogoju (3.19), so bile vse točke, ki pripadajo daljici, zavrtene za kot $-\frac{\pi}{2}$. V tem primeru je potrebno izračunanemu kotu ψ (3.21) prišteti kot $\frac{\pi}{2}$, da dobimo pravilno oceno parametra premice. Izračunan parameter r (3.21), ki pomeni razdaljo premice od koordinatnega izhodišča (Figure 3.3 a) ni

odvisen od rotacije točk daljice in zato ostane nespremenjen. Robni točki daljice ležita na ocenjeni premici in sta izračunani tako kot v predhodnem diplomskem delu [51]. x_R koordinata robne točke daljice je enaka x_R koordinati robne točke (Tx, Ty) iz množice (\mathbf{x}, \mathbf{y}) . y_R koordinata robne točke daljice pa je izračunana iz koordinate Tx ter iz ocenjenih parametrov eksplicitne enačbe premice \hat{k}_l ter \hat{c}_l (3.21). Če ima premica velik naklon oziroma, če je zadoščeno pogoju (3.19), je potrebno za določitev relevantne robne točke daljice izbrati koordinato Ty robne točke iz množice (\mathbf{x}, \mathbf{y}) ter iz nje izračunati x_R koordinato robne točke daljice.

Parametra normalne enačbe premice r_i in ψ_i ((3.2), slika 3.3) sta lahko izračunana tudi z zelo pogosto uporabljeno metodo ortogonalnih najmanjših kvadratov [22]. To metodo v našem delu poimenujmo s kratico oLSQ (orthogonal LSQ). Parametra r^* in ψ^* , ki minimizirata kriterijsko funkcijo $E(r, \psi) = \sum_{i=1}^N (r - \mathbf{x}(i) \cos(\psi) - \mathbf{y}(i) \sin(\psi))^2$ sta izračunana kot sledi

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r^* \\ \psi^* \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{x} \cos(\psi^*) + \bar{y} \sin(\psi^*) \\ \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{-2S_{xy}}{S_{y^2} - S_{x^2}}\right) \end{bmatrix} \triangleq \\ &\triangleq \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)) \\ f_2(\mathbf{x}(1), \mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{x}(n), \mathbf{y}(n)) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j)}{n}, & \bar{y} &= \frac{\sum_{j=1}^n \mathbf{y}(j)}{n}, & S_{x^2} &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}(j) - \bar{x})^2, \\ S_{y^2} &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{y}(j) - \bar{y})^2, & S_{xy} &= \sum_{j=1}^n (\mathbf{x}(j) - \bar{x})(\mathbf{y}(j) - \bar{y}). \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.4 Ocena kovarianc parametrov premic

Poleg vektorja parametrov premic $[r_i, \psi_i]^T$ (3.2), je potrebno za izvršitev korekcijskega dela EKF-a izračunati tudi kovariančno matriko tega vektorja (glej tudi (3.9, 3.10))

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \text{var}(r) & \text{cov}(r, \psi) \\ \text{cov}(\psi, r) & \text{var}(\psi) \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

Kovariančna matrika sestoji iz varianc obeh parametrov premice ter iz kovariance med obema parametroma. Te variance in kovariance je potrebno upoštevati, ker

šum na laserskih meritvah razdalj $\mathbf{d}_s(m)$ ter kotov $\theta_s(m)$ vpliva na oceni obeh parametrov premice.

Tukaj bomo predlagali metodo za ocenjevanje kovarianc obeh parametrov premic, ki izhaja iz navadnih najmanjših kvadratov (cLSQ). Najprej je potrebno izračunati kovariančno matriko vektorja parametrov eksplcitne enačbe premice $[\hat{k}_l, \hat{c}_l]^T$ (3.20). Napaka med y_R koordinatami točk daljice (\mathbf{x} , \mathbf{y}) ter ocenjeno premico izhaja iz šuma LRF-a. Če predpostavimo, da je ta napaka beli šum, lahko kovariančno matriko vektorja parametrov premice $[\hat{k}_l, \hat{c}_l]^T$ glede na teorijo najmanjših kvadratov izračunamo kot

$$\mathbf{C}e = \text{var}(\mathbf{y}(j))(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1} = \begin{bmatrix} \text{var}(\hat{k}_l) & \text{cov}(\hat{k}_l, \hat{c}_l) \\ \text{cov}(\hat{c}_l, \hat{k}_l) & \text{var}(\hat{c}_l) \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

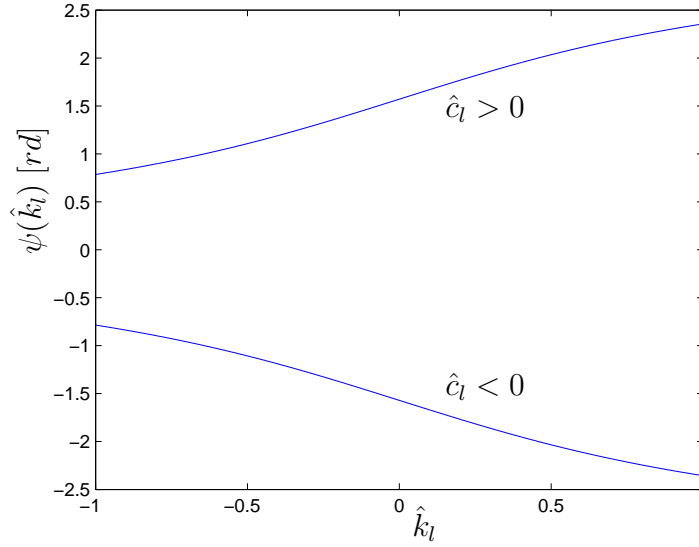
$$\text{var}(\mathbf{y}(j)) = \frac{\sum_{j=1}^n (\mathbf{y}(j) - \hat{\mathbf{y}}(j))^2}{n-1}, \quad \hat{\mathbf{y}}(j) = \hat{k}_l \cdot \mathbf{x}(j) + \hat{c}_l, \quad (3.27)$$

kjer je $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ varianca vertikalne napake med točkami daljice ($\mathbf{x}(j)$, $\mathbf{y}(j)$) ($j = 1, \dots, n$) in ocenjeno premico s parametri \hat{k}_l in \hat{c}_l . Ker je $\hat{\mathbf{y}}(j)$ izračunan iz $\mathbf{x}(j)$ koordinate, je varianca $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ izračunana iz obeh kartezijskih koordinat točk odboja ($\mathbf{x}(j)$, $\mathbf{y}(j)$). Ti dve koordinati sta izračunani kot $(\mathbf{d}_s(j) \cos \theta_s(j), \mathbf{d}_s(j) \sin \theta_s(j))$ (3.18), zato sta negotovost pri merjenju razdalje $\mathbf{d}_s(j)$ z LRF-om kot tudi negotovost kota $\theta_s(j)$ vključeni v varianco vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$. Ob poznavanju varianc in kovariance med parametroma premice \hat{k}_l in \hat{c}_l lahko z linearizacijo obeh enačb iz (3.21) ocenimo variance in kovarianco med parametroma r in ψ

$$\Delta r \approx \frac{\partial r(\hat{k}_l, \hat{c}_l)}{\partial k_l} \Delta k_l + \frac{\partial r(\hat{k}_l, \hat{c}_l)}{\partial c_l} \Delta c_l, \quad \Delta \psi \approx \frac{\partial \psi(\hat{k}_l)}{\partial k_l} \Delta k_l, \quad (3.28)$$

kjer so Δc_l , Δk_l , Δr in $\Delta \psi$ odstopanja od vrednosti \hat{k}_l , \hat{c}_l , r in ψ . Prva dva parcialna odvoda sta

$$\begin{aligned} K_{rk} &= \frac{\partial r(\hat{k}_l, \hat{c}_l)}{\partial k_l} = \frac{-\hat{c}_l \hat{k}_l}{\sqrt{\hat{k}_l^2 + 1}(\hat{k}_l^2 + 1)} \text{sign}(\hat{c}_l), \\ K_{rc} &= \frac{\partial r(\hat{k}_l, \hat{c}_l)}{\partial c_l} = \frac{\text{sign}(\hat{c}_l)}{\sqrt{\hat{k}_l^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (3.29)$$



Slika 3.7: Vrednosti funkcije $\psi(\hat{k}_l)$ na intervalu $\hat{k}_l \in [-1, 1]$ pri $\hat{c}_l > 0$ ter pri $\hat{c}_l < 0$.

Ob upoštevanju definicije $\arctan2$ funkcije (3.22) in parcialnega odvoda

$$\frac{\partial \arctan \frac{|\sin \psi(k_l)|}{|\cos \psi(k_l)|}}{\partial k_l} = \frac{\partial \arctan \frac{1}{|-k_l|}}{\partial k_l} = \begin{cases} -\frac{1}{k_l^2 + 1}, & k_l > 0; \\ \frac{1}{k_l^2 + 1}, & k_l < 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

sledi

$$K_{\psi k} = \frac{\partial \psi(\hat{k}_l)}{\partial k_l} = \frac{\text{sign}(\hat{c}_l)}{\hat{k}_l^2 + 1}. \quad (3.31)$$

Na sliki 3.7 so narisane vrednosti funkcije $\psi(\hat{k}_l)$ (3.21) v odvisnosti od naklona premice $\hat{k}_l \in [-1, 1]$ pri $\hat{c}_l > 0$ ter pri $\hat{c}_l < 0$. Opazimo, da je funkcija $\psi(\hat{k}_l)$ zvezna, zato je tudi njen odvod (3.31) zvezen.

Statistične lastnosti variance in kovariance so

$$\begin{aligned} \text{var}(a_r X_r + b_r Y_r) &= a_r^2 \text{var}(X_r) + b_r^2 \text{var}(Y_r) + 2a_r b_r \cdot \text{cov}(X_r, Y_r), \\ \text{cov}(a_r X_r + b_r Y_r, c_r W_r) &= a_r c_r \cdot \text{cov}(X_r, W_r) + b_r c_r \cdot \text{cov}(Y_r, W_r), \\ \text{var}(X_r) &= \text{cov}(X_r, X_r), \quad \text{cov}(X_r, Y_r) = \text{cov}(Y_r, X_r), \end{aligned} \quad (3.32)$$

kjer so X_r , Y_r in W_r naključne spremenljivke, a_r , b_r in c_r pa so konstante. Z upoštevanjem približkov Δr in $\Delta \psi$ (3.28) ter statističnih lastnosti (3.32) lahko

izpeljemo ocene varianc in kovarianc med parametroma premice r in ψ

$$\begin{aligned} var(\psi) &= K_{\psi k}^2 var(\hat{k}_l), \\ var(r) &= K_{rk}^2 var(\hat{k}_l) + K_{rc}^2 var(\hat{c}_l) + 2K_{rk}K_{rc} \cdot cov(\hat{k}_l, \hat{c}_l), \\ cov(r, \psi) &= K_{rk}K_{\psi k} var(\hat{k}_l) + K_{rc}K_{\psi k} \cdot cov(\hat{k}_l, \hat{c}_l), \quad cov(\psi, r) = cov(r, \psi). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Če je bil pogoj (3.19) izpolnjen, so bile vse točke daljice zavrtene za kot $-\frac{\pi}{2}$. Potem sta bila izračunana parametra r in ψ (3.21) in njihove kovariance (3.33). Da smo dobili pravi parameter premice, je bilo potrebno k izračunanemu kotu ψ (3.21) prišteti kot $\frac{\pi}{2}$. Izračunan parameter r pomeni razdaljo premice do koordinatnega izhodišča (slika 3.3). Vrednost tega parametra je neodvisna od vrtenja točk in zato ostane nespremenjena. Zato tudi varianca parametra ostane nespremenjena oziroma enaka že izračunani varianci $var(r)$ (3.33). Varianca pravih koda $var(\psi + \frac{\pi}{2})$ je prav tako enaka že izračunani varianci $var(\psi)$ (3.33), saj velja $var(\frac{\pi}{2}) = 0$. Ker velja $covar(r, \frac{\pi}{2}) = 0$, pa je tudi kovarianca $covar(r, \psi + \frac{\pi}{2})$ enaka že izračunani kovarianci $covar(r, \psi)$ (3.33).

Če sta parametra normalne enačbe premice premice r^* in ψ^* (slika 3.3) izračuna po metodi ortogonalni najmanjših kvadratov (3.23, 3.24), potem lahko kovariančno matriko teh dveh parametrov (3.25) glede na referenco [22] izračunamo kot sledi.

$$\mathbf{C}^* = \sum_{j=1}^n (\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j) \mathbf{C}_{m_j} (\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j)^T, \quad (3.34)$$

$$\mathbf{C}_{m_j} = \begin{bmatrix} \sigma_{d_j}^2 & \sigma_{d_j} \theta_j \\ \sigma_{\theta_j} d_j & \sigma_{\theta_j}^2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}(j)} & \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{y}(j)} \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}(j)} & \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{y}(j)} \end{bmatrix}, \quad (3.35)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{x}(j)} &= \frac{\cos(\psi^*)}{n} - \bar{x} \cos(\psi^*) \mathbf{A}_j(2, 1) + \bar{y} \cos(\psi^*) \mathbf{A}_j(2, 1), \\ \frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{y}(j)} &= \frac{\sin(\psi^*)}{n} - \bar{x} \cos(\psi^*) \mathbf{A}_j(2, 1) + \bar{y} \cos(\psi^*) \mathbf{A}_j(2, 1), \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{x}(j)} &= \frac{(\bar{y} - \mathbf{y}(j))(S_{y^2} - S_{x^2}) + 2S_{xy}(\bar{x} - \mathbf{x}(j))}{(S_{y^2} - S_{x^2})^2 + 4S_{xy}^2}, \\ \frac{\partial f_2}{\partial \mathbf{y}(j)} &= \frac{(\bar{x} - \mathbf{x}(j))(S_{y^2} - S_{x^2}) - 2S_{xy}(\bar{y} - \mathbf{y}(j))}{(S_{y^2} - S_{x^2})^2 + 4S_{xy}^2}, \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{d}_s(j)} & \frac{\partial g_1}{\partial \theta_s(j)} \\ \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{d}_s(j)} & \frac{\partial g_2}{\partial \theta_s(j)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_s(j) & -\mathbf{d}_s(j) \sin \theta_s(j) \\ \sin \theta_s(j) & \mathbf{d}_s(j) \cos \theta_s(j) \end{bmatrix}, \quad (3.37)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}(j) \\ \mathbf{y}(j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_s(j) \cos(\theta_s(j)) \\ \mathbf{d}_s(j) \sin(\theta_s(j)) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} g_1(\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j)) \\ g_2(\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j)) \end{bmatrix}. \quad (3.38)$$

\mathbf{C}_{m_j} označuje kovariančno matriko točke odboja v polarnih koordinatah $[\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j)]$, ki je rezultat meritve z LRF-om. Polarne koordinate $[\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j)]$ so transformirane (3.38) v kartezijske $[\mathbf{x}(j), \mathbf{y}(j)]$ z relacijama g_1 in g_2 . \mathbf{B}_j je matrika parcialnih odvodov transformacij g_1 in g_2 glede na polarne koordinate. \mathbf{A}_j pa je matrika parcialnih odvodov funkcije $\mathbf{f} = [f_1, f_2]$ (3.23) glede na kartezijske koordinate. Členi \bar{x} , \bar{y} , S_{x^2} , S_{y^2} ter S_{xy} so definirani v enačbi (3.24).

3.5 Ocena računske zahtevnosti kovarianc parametrov premice

Za rešitev problema lokalizacije ali problema SLAM je potrebno ob vsakem trenutnem posnetku okolja z LRF-om za vsako daljico iz lokalnega zemljevida, za katero je najdena skladna daljica iz globalnega zemljevida, izračunati dva parametra premice $[r_i, \psi_i]^T$ ter njuno kovariančno matriko. Tako algoritem SLAM kot algoritem lokalizacije morata teči v realnem času. SLAM je poznan kot računsko veliko bolj zahteven algoritem. Zato računaska učinkovitost istih algoritmov, ki so implementirani v lokalizacijskem in SLAM algoritmu, v SLAM-u igra pomembnejšo vlogo kot v lokalizaciji. V prejšnjem poglavju smo predstavili predlagano metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov premic iz okolja, ki temelji na navadnih najmanjših kvadratih (cLSQ), ter metodo, ki izhaja iz ortogonalnih najmanjših kvadratov (oLSQ) [22].

V tem poglavju bomo primerjali računsko zahtevnost obeh metod. Računsko zahtevnost vsake metode bomo analizirali s štetjem vseh elementarnih matematičnih operacij, ki so potrebne za izračun parametrov premice r in ψ (3.21) ter njune kovariančne matrike \mathbf{C} (3.25). Te operacije so vsota, odštevanje, množenje, deljenje, kvadratni koren, trigonometrične funkcije kosinus, sinus ter arkus tangens. Elementarne operacije v istih členih, ki so uporabljeni večkrat, so štete le enkrat. Algoritmi za izvršitev operacij množenja, deljenja in kvadratnega korena so na sodobnih računalnikih optimizirani tako, da dosežejo časovno zahtevnost operacije seštevanja in odštevanja. Vse te osnovne operacije so zato obravnavane kot, da imajo enako časovno zahtevnost, in so zato pri vsaki metodi (cLSQ in

oLSQ) seštete skupaj. Čas za izračun funkcij kosinus, sinus in arkus tangens ter čas za izvršitev operacije množenja so bili izmerjeni na prenosnem računalniku (1.4 GHz procesor, 256 Mb RAM) v programskem jeziku c++. Meritve so pokazale, da izračun funkcij kosinus in sinus v povprečju zahteva približno 4 krat več časa kot izvršitev operacije množenja. Izračun funkcije arkus tangens pa v povprečju traja približno 8 krat dlje kot izvršitev operacije množenja. Vsakemu izračunu funkcije kosinus ali sinus lahko torej v smislu časovne zahtevnosti pripišemo 4 operacije množenja, vsakemu izračunu funkcije arkus tangens pa 8 operacij množenja.

Najprej analizirajmo računsko zahtevnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih najmanjših kvadratov. V tabeli 3.1 je prikazana računsko zahtevnost vseh členov, ki so potrebni za izračun parametrov r in ψ (3.23) ter njune kovariančne matrike \mathbf{C}^* (3.34). N_{eq} pomeni ekvivalentno število operacij, ki so potrebne za izračun določnega matematičnega izraza ob upoštevanju, da je vsak izračun funkcije kosinus (sinus) ali funkcije tangens ekvivalenten 4 ali 8 operacijam množenja. Računska zahtevnost je očitno odvisna od števila točk daljice n (tabela 3.1). Kovariančna matrika točke v polarnih koordinatah \mathbf{C}_{m_j} mora biti podana vnaprej oziroma določena iz modela šuma LRF-a. Kovarianci med meritvijo razdalje ter kota laserskega žarka $\sigma_{d_j\theta_j}$ in $\sigma_{\theta_j d_j}$ (3.35) sta tukaj nastavljeni na nič, saj je kot

Tabela 3.1: Računska zahtevnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ, v primeru ničelne in neničelne variance kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$.

	N_{eq}
n krat matrike \mathbf{B}_j (3.37)	$11n / 8n$
n krat matrike \mathbf{A}_j (3.35, 3.36)	$18n + 19$
n krat $(\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j)\mathbf{C}_{m_j}$ (3.34)	$16n / 8n$
n krat $(\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j\mathbf{C}_{m_j}) * (\mathbf{A}_j\mathbf{B}_j)^T$ (3.34)	$9n$
$n - 1$ matričnih seštevanj (3.34)	$3n - 3$
$\bar{x}, \bar{y}, S_{x^2}, S_{y^2}, S_{xy}$ (3.24)	$12n - 3$
r^*, ψ^* (3.23)	23
celotna računsko zahtevnost	$C_{ols1}(n) = 69n + 36 /$ $C_{ols2}(n) = 58n + 36$

Tabela 3.2: Računska zahtevnost metode, ki izhaja iz navadnih LSQ.

	N_{eq}
$var(\mathbf{y}(j))$ (3.27)	$5n + 1$
matrični produkt $\mathbf{U}^T \mathbf{U}$ (3.26)	$3n - 2$
$var(\mathbf{y}(j)) * (\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1}$ (3.26)	10
$K_{rk}, K_{rc}, K_{\psi k}$ (3.29, 3.31)	10
$var(\psi), var(r), cov(r, \psi)$ (3.33)	16
$(\mathbf{U}^T \mathbf{U})^{-1} \mathbf{U}^T \mathbf{y}$ (3.20)	$4n + 4$
r, ψ (3.21)	13
celotna računsko zahtevnost	$C_{ls}(n) = 12n + 52$

v [29] predpostavljeno, da pri LRF senzorjih ni korelacije med meritvijo razdalje ter kota. Šum na kotu laserskega žarka $\theta_s(j)$ je v nekaterih člankih zanemarjen [5, 62, 9], medtem ko se v nekaterih člankih upošteva [2, 29, 64, 22]. Zato tukaj upoštevamo obe možnosti nastavitve variance kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$: primer šuma z ne-ničelno varianco $\sigma_{\theta_j}^2$ ter primer brez šuma oziroma primer z ničelno varianco $\sigma_{\theta_j}^2 = (0rad)^2$. Če je računsko zahtevnost nekega matematičnega izraza v primeru brez šuma drugačna kot v primeru šuma, potem se računsko zahtevnost pred znakom '/' (tabela 3.1) nanaša na primer šuma, računsko zahtevnost za znakom '/' pa na primer brez šuma. Kovarianci oziroma člena zgoraj desno ter spodaj levo v vsakem od matričnih matričnih produktov $(\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j \mathbf{C}_{m_j}) * (\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j)^T$ (3.34) sta enaka. Pri analiziranju računski zahtevnosti produkta $(\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j \mathbf{C}_{m_j}) * (\mathbf{A}_j \mathbf{B}_j)^T$ ((3.34), tabela 3.1) je zato upoštevano, da je izračunan samo eden izmed teh dveh členov. Ker sta tudi kovarianci $covar(r, \psi) = \mathbf{C}^*(1, 2)$ in $covar(\psi, r) = \mathbf{C}^*(2, 1)$ enaki, je v računski zahtevnosti $n - 1$ seštevanj 2×2 matrik (3.34, tabela 3.1) upoštevano, da je izračunan samo eden izmed členov $\mathbf{C}^*(1, 2)$ in $\mathbf{C}^*(2, 1)$. $C_{ols1}(n)$ označuje celotno računsko zahtevnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ, v primeru šuma z ne-ničelno varianco kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$. $C_{ols2}(n)$ pa označuje celotno računsko zahtevnost v primeru brez šuma oziroma pri ničelni varianci $\sigma_{\theta_j}^2$. $C_{ols1}(n)$ in $C_{ols2}(n)$ sta dobljeni s seštevanjem ekvivalentnih števil operacij (N_{eq}) vseh matematičnih izrazov, ki so prikazani v tabeli 3.1.

V tabeli 3.2 je prikazana računsko zahtevnost predlagane metode, ki izhaja

iz navadnih LSQ. Pri analiziranju računske zahtevnosti izraza $\mathbf{U}^T\mathbf{U}$ (3.26) je upoštevano, da se le ta lahko zapiše kot

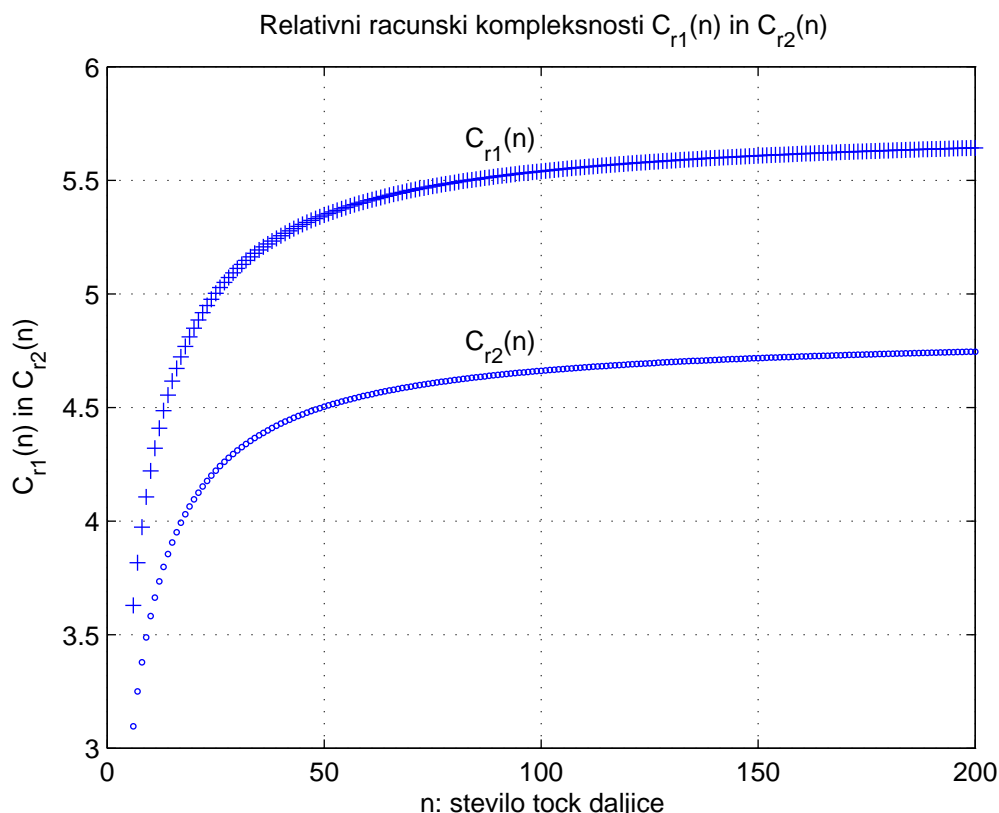
$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j)^2 & \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j) \\ \sum_{j=1}^n \mathbf{x}(j) & n \end{bmatrix}, \quad (3.39)$$

kjer sta člena zgoraj desno ter spodaj levo enaka. V analizi računske zahtevnosti izraza $\mathbf{C}e = \text{var}(\mathbf{y}(j)) * (\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}$ (3.26) je upoštevano, da je inverzija matrike dimenzij 2×2 izračunana z matriko kofaktorjev ter determinanto. Ker sta kovarianci $\text{cov}(\hat{c}_l, \hat{k}_l) = \mathbf{C}e(2, 1)$ (3.26) ter $\text{cov}(\hat{k}_l, \hat{c}_l) = \mathbf{C}e(1, 2)$ enaki, je upoštevano tudi, da je izračunan in pomnožen z varianco $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ samo eden izmed izven-diagonalnih členov 2×2 matrike $(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}$. Če je pogoj (3.19) izpolnjen, je bila vsaka točka daljice $(\mathbf{x}(j), \mathbf{y}(j))$ ($j = 1, \dots, n$) zamenjana z zavrteno točko $(\mathbf{y}(j), -\mathbf{x}(j))$. To zahteva n odštevanj, kar je v tabeli 3.2 upoštevano pri računski zahtevnosti izraza $(\mathbf{U}^T\mathbf{U})^{-1}\mathbf{U}^T\mathbf{y}$ (3.20). Pri računski zahtevnosti ocenjevanja parametrov r in ψ (3.21) je upoštevan najslabši primer računanja funkcije $\arctan2(y_a, x_a)$ (3.22), to je $(\pi - \arctan(\frac{|y_a|}{|x_a|})) * \text{sign}(y_a)$. Pri tej računski zahtevnosti je upoštevano tudi, da je potrebno v primeru izpolnjenega pogoja (3.19) k izračunanemu kotu ψ (3.21) prišteti $\frac{\pi}{2}$. $C_{ls}(n)$ (tabela 3.2) označuje celotno računsko zahtevnost metode, ki izhaja iz navadnih LSQ.

Kot že rečeno smo časovno zahtevnost izračuna funkcije kosinus oziroma sinus ter funkcije arkus tangens ocenili z uporabo prenosnega računalnika (1.4 GHz procesor, 256 Mb RAM) relativno glede na časovno zahtevnost operacije množenja. Računski zahtevnosti obeh metod (cLSQ in oLSQ) sta v tem primeru med seboj primerjani relativno kot sledi

$$C_{r1}(n) = \frac{C_{ols1}(n)}{C_{ls}(n)} = \frac{69n + 36}{12n + 52}, \quad C_{r2}(n) = \frac{C_{ols2}(n)}{C_{ls}(n)} = \frac{58n + 36}{12n + 52}, \quad (3.40)$$

kjer se relativna računska zahtevnost $C_{r1}(n)$ nanaša na primer šuma z ne-ničelno varianco kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$, relativna računska zahtevnost $C_{r2}(n)$ pa se nanaša na primer brez šuma oziroma z ničelno varianco $\sigma_{\theta_j}^2$. Slika 3.8 prikazuje relativni računski zahtevnosti $C_{r1}(n)$ in $C_{r2}(n)$ kot funkciji števila točk daljice $n \geq 6$. Če so izračunani parametra premice ter njuna kovariančna matrika iz 8 do 25 točk ali iz 25 do 200 točk, ima metoda cLSQ, ki izhaja iz navadnih LSQ, v primeru šuma z ne-ničelno varianco kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$ približno 4 do 5 ali 5 do 5.6 krat manj matematičnih operacij kot metoda oLSQ, ki izhaja



Slika 3.8: Relativni računski kompleksnosti $C_{r1}(n) = \frac{C_{ols1}(n)}{C_{ls}(n)}$ in $C_{r2}(n) = \frac{C_{ols2}(n)}{C_{ls}(n)}$ kot funkciji števila točk daljice $n \geq 6$.

iz ortogonalnih LSQ. Računska zahtevnost metode oLSQ metode je v primeru šuma z ničelno varianco $\sigma_{\theta_j}^2 = (0rad)^2$ nekaj manjša. Če so izračunani parametra premice ter njuna kovariančna matrika iz 9 do 50 ali iz 50 do 200 točk, ima cLSQ metoda v tem primeru približno 3.5 do 4.5 ali 4.5 do 4.7 krat manj matematičnih operacij kot metoda oLSQ.

Za rešitev problema lokalizacije ali SLAM je potrebno ob vsakem posnetku LRF-a za vse daljice iz trenutnega zemljevida, za katere so najdene skladne daljice iz globalnega zemljevida, izračunati vektorje dveh parametrov premic $[r_i, \psi_i]^T$ ter njihove kovariančne matrike. Pokazali smo da se z uporabo navadnih LSQ namesto ortogonalnih LSQ zmanjša računski zahtevnost pri ocenjevanju dveh parametrov normalne enačbe premice ter njune kovariančne matrike. Povsem enak algoritem za izračun teh parametrov premic ter njihovih kovariančnih matrik, ki se uporabi v algoritmu za lokalizacijo, se lahko potem uporabi tudi v algoritmu

SLAM, saj je le ta razširjena različica lokalizacijskega algoritma. Zato je ob uporabi navadnih LSQ namesto ortogonalnih LSQ zmanjšanje računske zahtevnosti v SLAM algoritmu absolutno gledano povsem enako kot v algoritmu za lokalizacijo.

3.6 Statistično vrednotenje točnosti ocenjenih kovarianc premice

V tem poglavju bomo primerjali točnost obeh metod za ocenjevanje kovarianc parametrov premice s pomočjo statistične analize. Tri različne daljice iz okolja so simulirane v okolju Matlab. Definirane so s parametri normalne enačbe premice r_{ei} in ψ_{ei} , $i = 1, 2, 3$ (tabela 3.3, 3.4 in 3.5) in koti laserskih žarkov $\theta_s(j)$ pri resoluciji 1° . Daljice so določene z $n = 36$ odbojnimi točkami.

Tabela 3.3: Tri daljice iz okolja, ki ustrezajo $n = 36$ odbojnim točkam.

$r_{e1} = 2m,$	$\psi_{e1} = \frac{\pi}{2}rd,$	$\theta_s(j): 60^\circ, 61^\circ, \dots, 95^\circ$
$r_{e2} = 50m,$	$\psi_{e2} = 130\frac{\pi}{180}rd,$	$\theta_s(j): 80^\circ, 81^\circ, \dots, 115^\circ$
$r_{e3} = 10m,$	$\psi_{e3} = 170\frac{\pi}{180}rd,$	$\theta_s(j): 97^\circ, 98^\circ, \dots, 132^\circ$

Za testiranje obeh metod za ocenjevanje kovarianc parametrov premice predpostavimo naslednji šum LRF-a

$$\theta_s(j) = \theta(j) + N(0, \sigma_{\theta_j}), \quad \mathbf{d}_s(j) = \mathbf{d}(j) + N(0, \sigma_{d_j}), \quad (3.41)$$

kjer $\theta(j)$ označuje resnični kot laserskega žarka, $N(0, \sigma_{\theta_j})$ pa označuje normalno porazdelitev šuma z ničelnim povprečjem in varianco napake kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j}^2$. $\mathbf{d}(j)$ je resnična razdalja med sensorjem LRF ter simulirano daljico iz okolja pri kotu laserskega žarka $\theta(j)$. $N(0, \sigma_{d_j})$ označuje normalno porazdeljen šum z ničelnim povprečjem in varianco napake izmerjene razdalje $\sigma_{d_j}^2$. Kovarianca med meritvijo razdalje ter kota $\sigma_{d_j\theta_j}$ (3.35) je v tem modelu ter v sledečih eksperimentih nastavljena na nič, sa je kot v [29] predpostavljeno da pri LRF sensorju ni korelacije med meritvijo razdalje ter kota.

Kot že omenjeno, je napaka kota laserskega žarka $\theta_s(j)$ v nekaterih člankih zanemarljena [5, 62, 9], medtem ko je v nekaterih člankih upoštevana [2, 29, 64,

22]. Zato tukaj upoštevamo dva primera nastavitve standardne deviacije kota laserskega žarka σ_{θ_j} : primer šuma z $\sigma_{\theta_j} = 0.0017rad$ (tabela 3.5) ter primer brez šuma z $\sigma_{\theta_j} = 0rad$ (tabela 3.4). Standardna deviacija napake izmerjene razdalje je nastavljena na $\sigma_{d_j} = 30mm$ (tabeli 3.4 in 3.5), kar je primerljivo z napako pri merjenju razdalje z našim LRF-om. Tukaj predpostavljamo da so standardne deviacije σ_{d_j} ter σ_{θ_j} vseh točk daljice enake.

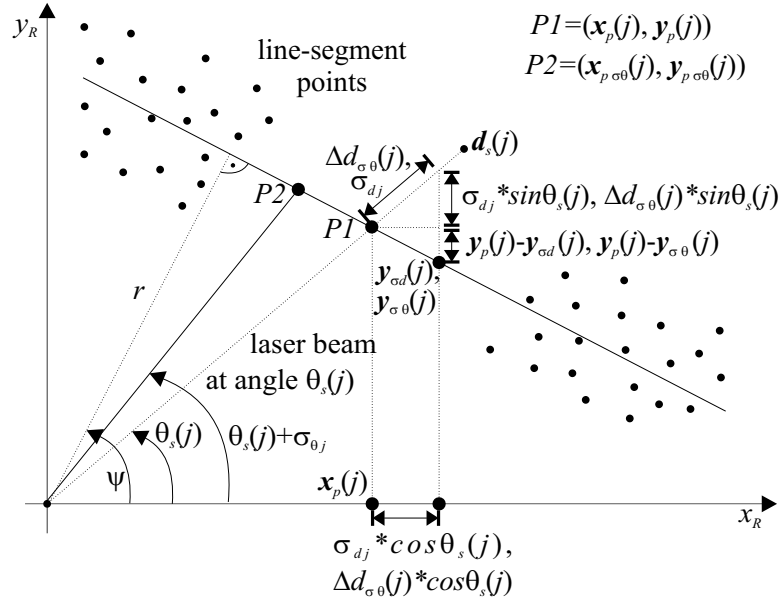
Eksperimenti ocenjevanja parametrov premice iz simuliranih točk odboja z uporabo metode navadnih LSQ (cLSQ) ter metode ortogonalnih LSQ (oLSQ) so ponovljeni N_{tr} -krat (npr., $N_{tr} = 10000$) za vsako od treh daljic iz okolja ter za oba primera šuma. Parametri premice r_u in ψ_u ($u = 1, \dots, N_{tr}$), ki so izračunani z metodo cLSQ (3.20, 3.21) ter oLSQ metodo (3.23, 3.24), so v vsakem eksperimentu malo drugačni zaradi vpliva šuma LRF-a (3.41). Standardni deviaciji obeh parametrov premice ter njuna kovarainca so za obe metodi izračunane kot sledi

$$\sigma_{r_u} = \sqrt{\frac{1}{N_{tr}} \sum_{u=1}^{N_{tr}} (r_u - r_{ei})^2}, \quad \sigma_{\psi_u} = \sqrt{\frac{1}{N_{tr}} \sum_{u=1}^{N_{tr}} (\psi_u - \psi_{ei})^2}, \quad (3.42)$$

$$cov(r_u, \psi_u) = \frac{1}{N_{tr}} \sum_{u=1}^{N_{tr}} (r_u - r_{ei}) * (\psi_u - \psi_{ei}); \quad i = 1, 2, 3$$

in so prikazane v tabelah 3.4 in 3.5. Te statistično dobljene standardne deviacije ter kovariance so uporabljene kot referenčne vrednosti za primerjavo točnosti obeh metod za ocenjevanje kovarianc parametrov premice iz ene množice točk, ki ustrezajo daljici.

Najprej izračunamo standardni deviaciji $\sigma_r = \sqrt{var(r)}$, $\sigma_\psi = \sqrt{var(\psi)}$ ter kovarianco $covar(r, \psi)$ po metodi navadnih LSQ (3.33). Tukaj je varianca vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ (3.26) izračunana iz odbojnih točk kot je prikazano v (3.27). Če je varianca $var(\mathbf{y}(j))$ izračunana iz zelo majhnega števila točk daljice (npr., 5), potem ocena te variance ni zelo točna. Če poznamo točno varianco napake izmerjene razdalje $\sigma_{d_j}^2$ (3.35) ter variance napake kota žarka $\sigma_{\theta_j}^2$ (npr. iz modela šuma LRF-a), lahko boljšo oceno variance vertikalne napake izračunamo kot sledi



Slika 3.9: Ocenjevanje variance vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ iz vnaprej poznanih varianc razdalje ter kota laserskega žarka $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$.

$$\begin{aligned} var(\mathbf{y}(j)) &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\sigma_{d_j} \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma d}(j)))^2 + \\ &\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\Delta d_{\sigma\theta}(j) \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma\theta}(j)))^2, \end{aligned} \quad (3.43)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_p(j) &= \frac{r \cos \theta_s(j)}{\cos \psi \cos \theta_s(j) + \sin \psi \sin \theta_s(j)}, \\ \mathbf{y}_p(j) &= \frac{r \sin \theta_s(j)}{\cos \psi \cos \theta_s(j) + \sin \psi \sin \theta_s(j)}, \\ \mathbf{y}_{\sigma d}(j) &= \frac{r - (\mathbf{x}_p(j) + \sigma_{d_j} \cos \theta_s(j)) \cos \psi}{\sin \psi}, \end{aligned} \quad (3.44)$$

$$\Delta d_{\sigma\theta}(j) = \sqrt{x_p^2(j) + y_p^2(j)} - \sqrt{x_{p\sigma\theta}^2(j) + y_{p\sigma\theta}^2(j)}. \quad (3.45)$$

Variance vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ (3.43) je tukaj ocenjena iz variance napake izmerjene razdalje $\sigma_{d_j}^2$ (3.35) ter variance napake kota žarka $\sigma_{\theta_j}^2$ za namen primerjave točnosti metod cLSQ in oLSQ. $P1 = (\mathbf{x}_p(j), \mathbf{y}_p(j))$ (slika 3.9) je presečišče med premico j -tega laserskega žarka z enačbo $y_R = \tan \theta_s(j)x_R$ ter ocenjeno premico iz okolja s parametroma r in ψ (3.2, 3.21). $\mathbf{y}_{\sigma d}(j)$ je y_R koordinata točke na ocenjeni premici (r, ψ) pri koordinati $\mathbf{x}_p(j) + \sigma_{d_j} \cos \theta_s(j)$ (slika 3.9).

$\sigma_{d_j}^2$ je varianca razdalje vsake odbojne točke od resnične daljice iz okolja v smeri določenega laserskega žarka. $(\sigma_{d_j} \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma d}(j)))^2$ je varianca razdalje j -te odbojne točke od ocenjene daljice (r, ψ) v navpični smeri. Ta varianca je odvisna od standardne deviacije izmerjene razdalje σ_{d_j} , kota laserskega žarka $\theta_s(j)$ in naklona ocenjene premice ψ . Premica iz okolja je ocenjena iz n odbojnih točk $(\mathbf{d}_s(j), \theta_s(j))$. Zato je za relevantno oceno tistega dela variance vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$, ki izhaja iz napak na razdaljah $\mathbf{d}_s(j)$, izračunano povprečje vseh n varianc $(\sigma_{d_j} \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma d}(j)))^2$ (3.43). $P2 = (\mathbf{x}_{p\sigma\theta}(j), \mathbf{y}_{p\sigma\theta}(j))$ (slika 3.9) je presečišče med j -to premico laserskega žarka z enačbo $y_R = \tan(\theta_s(j) + \sigma_{\theta_j}) * x_R$ ter premico iz okolja s parametroma r in ψ (3.2, 3.21). $\mathbf{y}_{\sigma\theta}(j)$ je y_R koordinata točke na premici iz okolja (r, ψ) pri koordinati $\mathbf{x}_p(j) + \Delta d_{\sigma\theta} \cos \theta_s(j)$ (slika 3.9). V lokalizacijskem algoritmu niso uporabljeni resnični koti laserskih žarkov $\theta(j)$ (3.41) ampak koti žarkov $\theta_s(j)$ ($0^\circ, \dots, 180^\circ$) (slika 3.9). Zato je šum na kotu laserskega žarka s standardno deviacijo σ_{θ_j} tukaj upoštevan kot napaka pri merjenju razdalje $\mathbf{d}_s(j)$ s standardno deviacijo $\Delta d_{\sigma\theta}$ (3.45). V enačbi (3.45) točka $P1 = (\mathbf{x}_p(j), \mathbf{y}_p(j))$ (slika 3.9) ustreza kotu laserskega žarka $\theta_s(j)$ (3.41), točka $P2 = (\mathbf{x}_{p\sigma\theta}(j), \mathbf{y}_{p\sigma\theta}(j))$ pa ustreza kotu $\theta_s(j) + \sigma_{\theta_j}$. $(\Delta d_{\sigma\theta}(j) \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma\theta}(j)))^2$ je transformacija standardne deviacije $\Delta d_{\sigma\theta}(j)$, ki je v smeri j -tega laserskega žarka, v varianco v navpični smeri glede na ocenjeno premico iz okolja (r, ψ) (slika 3.9). Ta varianca je odvisna od standardne deviacije napake kota laserskega žarka σ_{θ_j} , kota laserskega žarka $\theta_s(j)$ in naklona ocenjene premice ψ . Za relevantno oceno tistega dela variance $\text{var}(\mathbf{y}(j))$, ki izvira iz napak na kotih laserskih žarkov $\theta_s(j)$, je izračunano povprečje vseh n varianc $(\Delta d_{\sigma\theta}(j) \sin \theta_s(j) + (\mathbf{y}_p(j) - \mathbf{y}_{\sigma\theta}(j)))^2$. Če je pogoj (3.19) izpolnjen, so bile vse točke daljice zavrtene za kot $-\frac{\pi}{2}$. Zato morajo biti v tem primeru v enačbah (3.43, 3.44) koti laserskih žarkov $\theta_s(j)$ zamenjani s koti $\theta_s(j) - \frac{\pi}{2}$. Prav tako mora biti v teh enačbah v omenjenem primeru ocenjen parameter premice ψ zamenjan s parametrom $\psi - \frac{\pi}{2}$. Točnost ocenjene variance vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (3.43) je odvisna od točnosti ocenjenih varianc razdalj ter kotov laserskih žarkov $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$. Bolj točna ocena variance $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (3.26) povzroči boljšo oceno kovarianc parametrov premice $\text{var}(r)$, $\text{var}(\psi)$ in $\text{cov}(r, \psi)$ (3.33). Variance napak pri merjenju vseh razdalj $\sigma_{d_j}^2$ ter variance napak na vseh kotih laserskih žarkov $\sigma_{\theta_j}^2$ morajo biti podane vnaprej iz predhodno ocenjenega modela šuma LRF-a.

Kovariance parametrov premice so lahko ocenjene tudi z že opisano metodo,

ki izhaja iz ortogonalnih najmanjših kvadratov (3.35). Negotovosti na vhodu te metode so variance napak pri merjenju razdalj $\sigma_{d_j}^2$ ter variance napak na kotih laserskih žarkov $\sigma_{\theta_j}^2$. Zaradi primerjave obeh metod (cLSQ in oLSQ) obravnavajmo primer, ko so standardne deviacije kotov enake nič $\sigma_{\theta_j} = 0rd$ (tabela 3.4) in ko standardne deviacije σ_{d_j} niso podane vnaprej (npr., iz modela šuma LRF-a). Predpostavimo še, da so variance $\sigma_{d_j}^2$ vseh izmerjenih razdalj $\mathbf{d}_s(j)$, ki ustrezajo točkam daljice, enake. Varianca $\sigma_{d_j}^2$ (slika 3.9) je potem lahko ocenjena iz točk daljice kot sledi

$$\sigma_{d_j}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n-1} (\mathbf{d}_s(j) - \sqrt{\mathbf{x}_p(j)^2 + \mathbf{y}_p(j)^2})^2, \quad (3.46)$$

kjer točka $(\mathbf{x}_p(j), \mathbf{y}_p(j))$ ((3.44), slika 3.9) predstavlja presečišče med premico j -tega laserskega žarka ter ocenjeno premico iz okolja s parametroma r in ψ (3.2, 3.23).

V tabelah 3.4 in 3.5 so prikazani rezultati eksperimentov, kjer so bile standardne deviacije in kovariance parametrov premice r in ψ izračunane po metodi, ki izhaja iz navadnih LSQ, kot $\sigma_r = \sqrt{\text{var}(r)}$, $\sigma_\psi = \sqrt{\text{var}(\psi)}$ in $\text{cov}(r, \psi)$ (3.33) ter po metodi, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ (3.34), kot $\sigma_r = \sqrt{\mathbf{C}^*(1, 1)}$, $\sigma_\psi = \sqrt{\mathbf{C}^*(2, 2)}$ in $\text{cov}(r, \psi) = \mathbf{C}^*(2, 1)$. Upoštevali smo vse tri daljice iz okolja (tabela 3.42) in oba primera šuma. Eksperiment za izračun teh dveh varianc ter kovarianc za vsako množico točk daljice je bil ponovljen N_{tr} -krat ($N_{tr} = 10000$) z istimi množicami točk daljice in z istima variancama $\sigma_{d_j}^2$ ter $\sigma_{\theta_j}^2$ iz modela šuma LRF-a kot v eksperimentih za izračun referenčnih standardnih deviacij σ_{r_u} , σ_{ψ_u} in kovariance $\text{cov}(r_u, \psi_u)$ (3.42). Standardni deviaciji σ_r in σ_ψ ter kovarianca $\text{cov}(r, \psi)$ so v vsakem eksperimentu drugačne zaradi vpliva šuma na izmerjenih razdaljah ter kotih laserskih žarkov (3.41). Za predstavitev točnosti obeh metod, ki izhajata iz navadnih ter ortogonalnih LSQ, so v tabelah 3.4 in 3.5 prikazana povprečja ($\text{povp}(\cdot)$) in standardne deviacije ($\text{std}(\cdot)$) N_{tr} -krat ($N_{tr} = 10000$) izračunanih standardnih deviacij σ_r in σ_ψ ter kovarianc $\text{cov}(r, \psi)$. Standardne deviacije $\text{std}(\sigma_r)$, $\text{std}(\sigma_\psi)$ in $\text{std}(\text{cov}(r, \psi))$ (tabeli 3.4 in 3.5) so izračunane glede na povprečja $\text{povp}(\sigma_r)$, $\text{povp}(\sigma_\psi)$ in $\text{povp}(\text{cov}(r, \psi))$.

V tabelah 3.4 in 3.5 se povprečja $\text{povp}(\cdot)$ in standardne deviacije $\text{std}(\cdot)$ standardnih deviacij σ_r in σ_ψ ter kovarianc $\text{cov}(r, \psi)$ nanašajo na primer, ko sta varainca $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (metoda cLSQ) in standardna deviacija σ_{d_j} (metoda oLSQ)

v vsakem eksperimentu ocenjeni iz točk daljice. Povprečja *a priori* : $povp(\cdot)$ in standardne deviacije *a priori* : $std(\cdot)$ (tabeli 3.4 in 3.5) pa se nanašajo na primer, ko sta varianca $var(\mathbf{y}(j))$ (metoda cLSQ) in standardna deviacija σ_{d_j} (metoda oLSQ) ocenjeni iz varianc $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$, ki sta vnaprej (a-priori) podani iz modela šuma LRF-a. Ker je varianca $\sigma_{d_j}^2$ (3.35) lahko ocenjena iz točk daljice (3.46) samo v primeru šuma z ničelno standardno deviacijo kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j} = 0rd$, so polja v tabeli 3.5, ki ustrezajo metodi ortogonalnih LSQ in primeru šuma z ne-ničelno standardno deviacijo $\sigma_{\theta_j} = 0.0017rd$, prazna.

Če sta varianca $var(\mathbf{y}(j))$ (navadni LSQ, oba primera šuma) in varianca $\sigma_{d_j}^2$ (ortogonalni LSQ, primer šuma z $\sigma_{\theta_j} = 0rd$) ocenjeni iz točk daljice, so v simulaciji (tabeli 3.4 in 3.5) standardne deviacije parametrov premice σ_r in σ_ψ ter kovariance $cov(r, \psi)$ primerljive z referenčnimi standardnimi deviacijami σ_{r_u} , σ_{ψ_u} ter kovariancami $cov(r_u, \psi_u)$. Točnost varianc $var(\mathbf{y}(j))$ (3.27) in $\sigma_{d_j}^2$ (3.46) je odvisna od števila točk daljice iz katerih sta ocenjeni. Posledično je tudi točnost ocenjenih standardnih deviacij σ_r , σ_ψ in kovarianc $cov(r, \psi)$ odvisna od števila točk daljice. Bolj točni oceni varianc napak pri merjenju razdalje in kota laserskega žarka $\sigma_{d_j}^2$ ter $\sigma_{\theta_j}^2$ sta lahko podani vnaprej iz predhodno ocenjenega modela šuma LRF-a. Varianca $var(\mathbf{y}(j))$ (3.43) za metodo, ki izhaja iz navadnih LSQ, je potem tudi lahko bolj točna, če je ocenjena iz varianc $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$. V simulacijskih eksperimentih za ocenjevanje standardnih deviacij σ_r , σ_ψ in kovarianc $cov(r, \psi)$ (tabeli 3.4 in 3.5) sta bili vnaprej (a-priori) podani oceni varianc $\sigma_{d_j}^2$ in $\sigma_{\theta_j}^2$ nastavljeni na resnično vrednost $(30mm)^2$ in $(0.0017rd)^2$ ali $0rd^2$. Rezultirajoče standardne deviacije σ_r , σ_ψ in kovariance $cov(r, \psi)$ ocenjene z metodama, ki izhajata iz navadnih ter ortogonalnih LSQ, so v tem primeru bližje pripadajočim referenčnim standardnim deviacijam r_u , ψ_u ter kovariancam $cov(r, \psi)$ kot v primeru, ko sta varianci $\sigma_{d_j}^2$ (oLSQ, $\sigma_{\theta_j}^2 = 0rd^2$) in $var(\mathbf{y}(j))$ (cLSQ) ocenjeni iz točk daljice. V omenjenih eksperimentih je točnost ocenjenih standardnih deviacij σ_r , σ_ψ ter kovarianc $cov(r, \psi)$ v primeru šuma z ne-ničelno standardno deviacijo kota žarka $\sigma_{\theta_j} = 0.0017rd$ (tabela 3.5) pri vsaki posamezni metodi (cLSQ ali oLSQ) praktično na isti ravni kot v primeru šuma z ničelno standardno deviacijo $\sigma_{\theta_j} = 0rd$ (tabela 3.4).

Pokazali smo torej rezultate točnosti kovarianc parametrov simuliranih premic, ki so ocenjene z metodama cLSQ ter oLSQ iz dokaj velikega števila točk

Tabela 3.4: Primerjava točnosti obeh metod, ki izhajata iz navadnih (cLSQ) ter ortogonalnih LSQ (oLSQ), v primeru šuma z ničelno standardno deviacijo kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j} = 0rd$. Simulirane so tri različne daljice iz okolja ($r_{ei}, \psi_{ei}; i = 1, 2, 3$).

	r_{e1}, ψ_{e1}		r_{e2}, ψ_{e2}	
	cLSQ	oLSQ	cLSQ	oLSQ
σ_{r_u} [mm]	7.8	7.9	11.9	11.9
$povp(\sigma_r)$ [mm]	7.3	7.5	11.0	11.5
$std(\sigma_r)$ [mm]	0.9	0.9	1.4	1.4
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_r)$ [mm]	7.4	7.7	11.2	11.8
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_r)$ [mm]	0.2	0.2	$9 * 10^{-4}$	0.001
σ_{ψ_u} [rd]	0.012	0.012	$3 * 10^{-4}$	$3 * 10^{-4}$
$povp(\sigma_\psi)$ [rd]	0.012	0.012	$3 * 10^{-4}$	$3 * 10^{-4}$
$std(\sigma_\psi)$ [rd]	0.001	0.001	$4 * 10^{-5}$	$4 * 10^{-5}$
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_\psi)$ [rd]	0.012	0.012	$3 * 10^{-4}$	$3 * 10^{-4}$
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_\psi)$ [rd]	$8 * 10^{-5}$	$8 * 10^{-5}$	10^{-7}	10^{-7}
$cov(r_u, \psi_u)$ [mm * rd]	-0.076	-0.077	-0.003	-0.003
$povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.068	-0.071	-0.003	-0.003
$std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	0.017	0.018	$8 * 10^{-4}$	$8 * 10^{-4}$
<i>a - priori</i> : $povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.070	-0.073	-0.003	-0.003
<i>a - priori</i> : $std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	0.003	0.003	10^{-6}	10^{-6}

	r_{e3}, ψ_{e3}	
	cLSQ	oLSQ
σ_{r_u} [mm]	7.9	7.9
$povp(\sigma_r)$ [mm]	7.2	7.9
$std(\sigma_r)$ [mm]	1.0	1.0
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_r)$ [mm]	7.4	8.0
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_r)$ [mm]	0.006	0.006
σ_{ψ_u} [rd]	$4 * 10^{-4}$	$4 * 10^{-4}$
$povp(\sigma_\psi)$ [rd]	$4 * 10^{-4}$	$4 * 10^{-4}$
$std(\sigma_\psi)$ [rd]	$6 * 10^{-5}$	$5 * 10^{-5}$
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_\psi)$ [rd]	$4 * 10^{-4}$	$4 * 10^{-4}$
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_\psi)$ [rd]	$4 * 10^{-7}$	$4 * 10^{-7}$
$cov(r_u, \psi_u)$ [mm * rd]	-0.003	-0.003
$povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.003	-0.003
$std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	$7 * 10^{-4}$	$7 * 10^{-4}$
<i>a - priori</i> : $povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.003	-0.003
<i>a - priori</i> : $std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	$5 * 10^{-6}$	$5 * 10^{-6}$

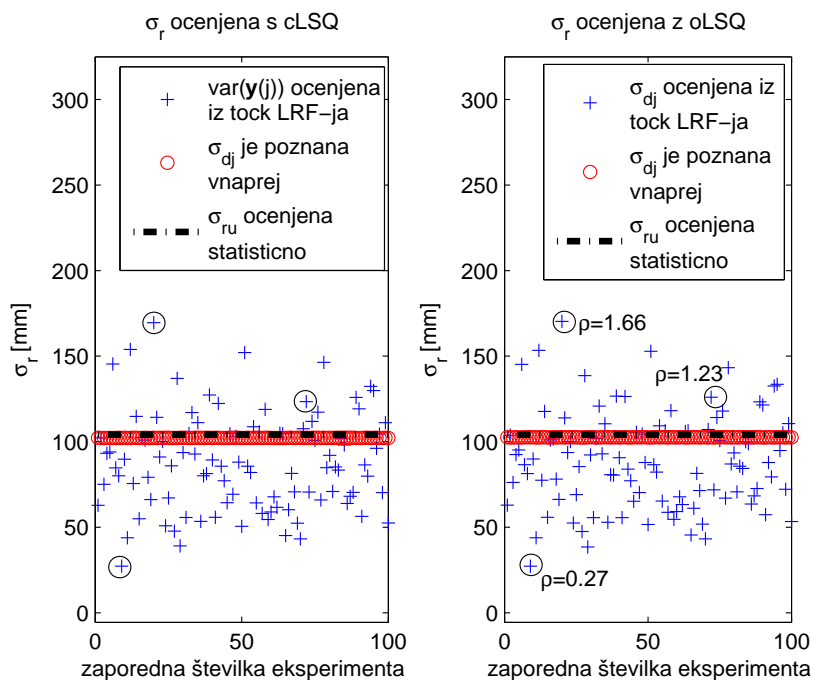
Tabela 3.5: Primerjava točnosti obeh metod, ki izhajata iz navadnih (cLSQ) ter ortogonalnih LSQ (oLSQ), v primeru šuma z ne-ničelno standardno deviacijo kota laserskega žarka $\sigma_{\theta_j} = 17 * 10^{-4}rd$. Simulirane so tri različne daljice iz okolja ($r_{ei}, \psi_{ei}; i = 1, 2, 3$).

	r_{e1}, ψ_{e1}		r_{e2}, ψ_{e2}	
	cLSQ	oLSQ	cLSQ	oLSQ
σ_{r_u} [mm]	7.7	7.7	26.9	26.9
$povp(\sigma_r)$ [mm]	7.3	/	28.7	/
$std(\sigma_r)$ [mm]	0.9	/	4.0	/
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_r)$ [mm]	7.5	7.7	29.5	26.9
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_r)$ [mm]	0.2	0.2	0.1	0.1
σ_{ψ_u} [rd]	0.012	0.012	$9 * 10^{-4}$	$9 * 10^{-4}$
$povp(\sigma_\psi)$ [rd]	0.012	/	$8 * 10^{-4}$	/
$std(\sigma_\psi)$ [rd]	0.001	/	10^{-4}	/
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_\psi)$ [rd]	0.012	0.012	$8 * 10^{-4}$	$9 * 10^{-4}$
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_\psi)$ [rd]	$7 * 10^{-5}$	$8 * 10^{-5}$	$3 * 10^{-7}$	$6 * 10^{-7}$
$cov(r_u, \psi_u)$ [mm * rd]	-0.074	-0.075	-0.023	-0.023
$povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.068	/	-0.022	/
$std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	0.017	/	0.006	/
<i>a - priori</i> : $povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.070	-0.074	-0.022	-0.023
<i>a - priori</i> : $std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	0.003	0.003	$5 * 10^{-5}$	$7 * 10^{-5}$

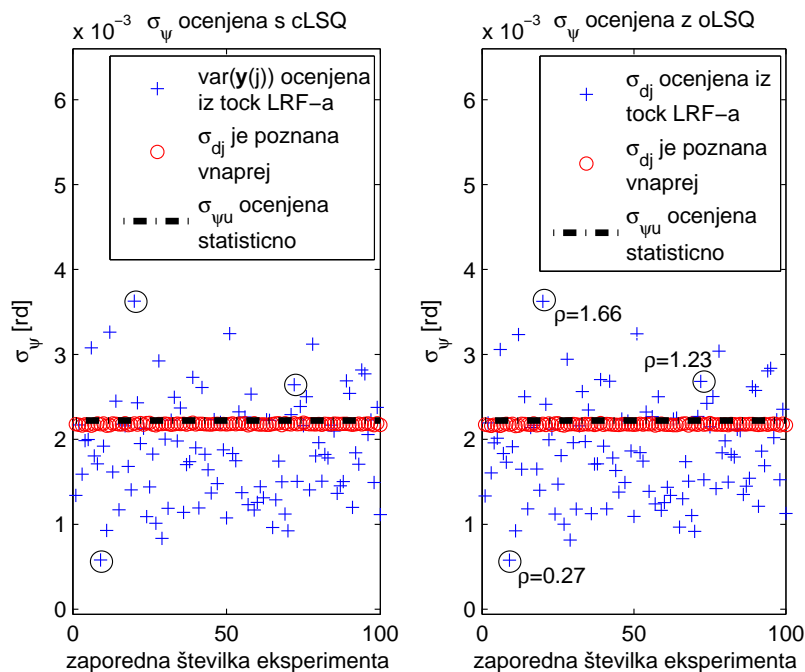
	r_{e3}, ψ_{e3}	
	cLSQ	oLSQ
σ_{r_u} [mm]	15.6	15.6
$povp(\sigma_r)$ [mm]	14.4	/
$std(\sigma_r)$ [mm]	2.0	/
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_r)$ [mm]	14.8	15.5
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_r)$ [mm]	0.01	0.02
σ_{ψ_u} [rd]	0.001	0.001
$povp(\sigma_\psi)$ [rd]	$8 * 10^{-4}$	/
$std(\sigma_\psi)$ [rd]	10^{-4}	/
<i>a - priori</i> : $povp(\sigma_\psi)$ [rd]	$8 * 10^{-4}$	0.001
<i>a - priori</i> : $std(\sigma_\psi)$ [rd]	$2 * 10^{-6}$	$1 * 10^{-6}$
$cov(r_u, \psi_u)$ [mm * rd]	-0.015	-0.015
$povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.011	/
$std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	0.003	/
<i>a - priori</i> : $povp(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	-0.011	-0.015
<i>a - priori</i> : $std(cov(r, \psi))$ [mm * rd]	$4 * 10^{-5}$	$4 * 10^{-5}$

$n = 36$. Obravnavajmo še primer, ko so kovaraince ter parametri premice ocenjeni iz manjšega števila točk $n = 8$ in ko so resnične variance parametrov premic velike. Če je robot daleč stran od premice (parameter r je velik), je napaka pri ocenjevanju parametra premice r (3.2, 3.21) lahko velika že pri majhnih napakah naklona premice \hat{k}_l (3.20). To lahko razberemo iz parcialnega odvoda K_{rk} (3.29), ki predstavlja občutljivost napake parametra premice r na napako naklona premice \hat{k}_l . Napako pri ocenjevanju parametra k_l in napako pri ocenjevanju parametra r lahko opišemo z variancama $\text{var}(\hat{k}_l)$ (3.26) in $\text{var}(r)$ (3.33). Varianca napake parametra \hat{k}_l v enačbi (3.26) je posledica variance vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$, ki odseva napako pri merjenju razdalje ter kota z LRF-om. Če je absolutna vrednost naklona premice večja od 1, so zaradi boljše pogojenosti LSQ regresije vse točke daljice zavrtene za kot $-\frac{\pi}{2}$. Največja absolutna vrednost naklona \hat{k}_l je potem 1. Faktor K_{rk} (3.33) pri določeni vrednosti parametra \hat{c}_l doseže največjo vrednost pri vrednosti parametra $\hat{k}_l = 0.707$. Če je robot daleč stran od premice iz okolja (absolutna vrednost parametra \hat{c}_l je velika) in če je absolutna vrednost parametra \hat{k}_l blizu vrednosti 0.707, postane faktor K_{rk}^2 velik. V tem primeru majhna varianca napake naklonu premice $\text{var}(\hat{k}_l)$ povzroči veliko varianco napake $\text{var}(r)$. Ker je vrednost parametra premice iz lokalnega zemljevida r (ali parametrov \hat{k}_l ter \hat{c}_l) odvisna od lege robota v prostoru (slika 3.3), je tudi varianca napake tega parametra $\text{var}(r)$ odvisna od lege robota.

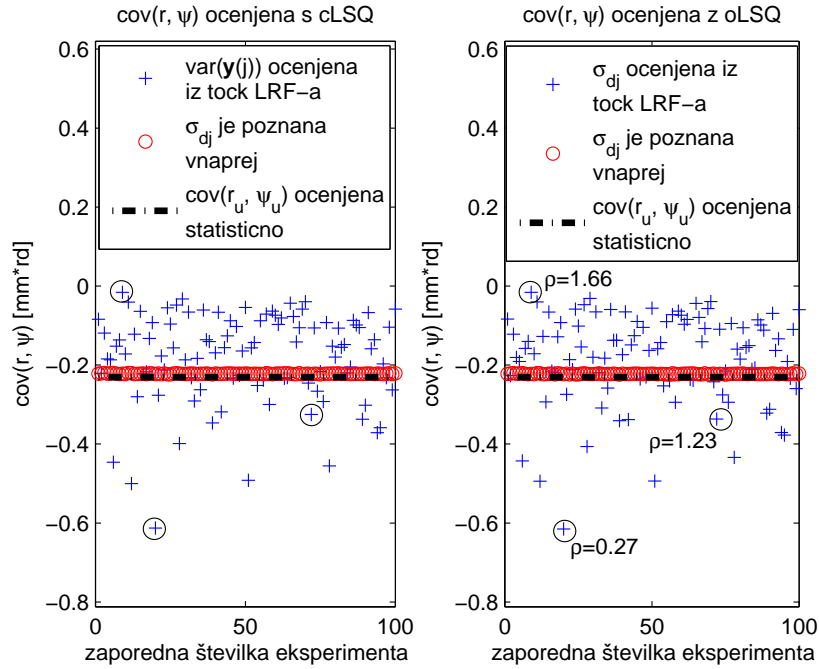
Simulirajmo premico iz okolja s parametroma normalne enačbe premice $r_e = 63m$ in $\psi_e = 125 * \frac{\pi}{180} rad$, kar je ekvivalentno parametroma eksplicitne enačbe premice $k_{le} = 0.7002$ in $c_{le} = 76.9088m$. To je primer, ko je robot daleč stran od ravnega segmenta oziroma daljice iz okolja (parameter premice r je zelo velik) in kjer je naklon premice iz okolja k_{le} blizu 0.707. Daljica je definirana s koti laserskih žarkov $\theta_s(j) = 85^\circ, 86^\circ, \dots, 92^\circ$. Standardne deviacije napak razdalj ter kotov, ki so izmerjeni z LRF-om, so v simulaciji nastavljena na isto vrednost kot v predhodnih eksperimentih $\sigma_{d_j} = 30mm$ ter $\sigma_{\theta_j} = 0rd$. Pri uporabi metode oLSQ je potrebno oceniti standardno deviacijo σ_{d_j} (3.35), pri uporabi metode cLSQ pa varianco vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (3.27). V prvem primeru sta tako standardna deviacija σ_{d_j} (3.46) kot tudi varianca $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (3.27) ocenjeni iz točk daljice. V drugem primeru sta standardni deviaciji razdalje σ_{d_j} ter kota σ_{θ_j} (3.35) podani vnaprej in nastavljeni na resnični oziroma simulirani vrednosti $30mm$ in $0rd$, iz katerih pa je nato izračunana še varianca $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (3.43). Slike 3.10, 3.11



Slika 3.10: Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_r = \sqrt{\text{var}(r)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.



Slika 3.11: Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_\psi = \sqrt{\text{var}(\psi)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.



Slika 3.12: Rezultati ocenjevanja kovariance parametrov premice $cov(r, \psi)$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ, ko je daljica definirana z 8 točkami.

in 3.12 prikazujejo statistično ocenjene oziroma referenčne standardne deviacije $\sigma_{ru} = \sqrt{\text{var}(r_u)}$, $\sigma_{\psi u} = \sqrt{\text{var}(\psi_u)}$ ter $cov(r_u, \psi_u)$ (3.42), ki so pri obeh metodah izračunane iz $N_{tr} = 100$ ocen parametrov premic r_u ter ψ_u . Na slikah pa so prikazani tudi rezultati 100 eksperimentov ocenjevanja standardnih deviacij ter kovarianc parametrov premice $\sqrt{\text{var}(r)}$, $\sqrt{\text{var}(\psi)}$ ter $cov(r, \psi)$, ki so ocenjene z metodama cLSQ (3.33) ter oLSQ (3.34). Pri vsakem eksperimentu ocenjevanja parametrov premic r_u in ψ_u (3.42) ter kovarianc parametrov premic z uporabo metod cLSQ (3.33) in oLSQ (3.34) smo uporabili drug nabor pošumljenih točk LRF-a. Na slikah lahko vidimo kolikšna so odstopanja ocenjenih standardnih deviacij ter kovarianc premic od referenčnih standardnih deviacij ter kovarianc v primeru, ko sta varianca vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (cLSQ, (3.27)) ter standardna deviacija σ_{d_j} (oLSQ, (3.46)) ocenjeni iz majhnega števila točk daljice $n = 8$.

Za primerjavo metod cLSQ ter oLSQ vpeljimo razmerje $\rho = \frac{\sigma_{d_j}}{30\text{mm}}$. ρ je razmerje med standardno deviacijo razdalje LRF-a σ_{d_j} (3.46), ki je ocenjena iz točk LRF-a, ter resnično standardno deviacijo razdalje 30mm . Na slikah 3.10, 3.11 in 3.12 so pri treh eksperimentih, kjer so variance vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$

(cLSQ, (3.27)) in standardne deviacije σ_{d_j} (oLSQ, (3.46)) ocenjene iz 8 točk LRF-a, obkrožene vrednosti ocenjenih standardnih deviacij ter kovarianc premice. Pri metodi oLSQ pa so poleg krogcev napisane tudi pripadajoče vrednosti razmerij $\rho = 0.27$, $\rho = 1.23$ in $\rho = .66$. Obravnavajmo originalno metodo cLSQ, kjer je varianca vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ (3.27) ocenjena iz točk LRF-a, ter originalno metodo oLSQ, kjer je standardna deviacija razdalje σ_{d_j} (3.35) podana vnaprej oziroma ocenjena pred procesom loklizacije mobilnega robota. Zato predpostavimo, da vnaprej podana standardna deviacija σ_{d_j} odstopa od resnične vrednosti standardne deviacije, ki je v simulaciji nastavljena na vrednost $30mm$. Pri določeni zaporedni številki eksperimenta (slike 3.10, 3.11 in 3.12) so odstopanja ocenjenih standardnih deviacij ter kovarianc parametrov premice od referenčnih standardnih deviacij ter referenčne kovariance pri obeh metodah praktično identična. Obkroženi rezultati ocenjevanja standardnih deviacij ter kovariance parametrov premice pri uporabi originalne metode cLSQ so torej praktično identični obkroženim rezultatom pri uporabi originalne metode oLSQ, kjer napake vnaprej podanih standardnih deviacij razdalje σ_{d_j} (3.35) znašajo $(1 - 0.27) * 100 = 73$, $(1.23 - 1) * 100 = 23$ ter $(1.66 - 1) * 100 = 66$ odstotkov resnične standardne deviacije razdalje $30mm$.

Iz dela [30] v tem odstavku povzemamo priporočilo kako zagotoviti konsistenco ocene kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}(k)$ (3.7) v primeru napačne statistike šuma, ki nastopa v procesu. Zaradi netočno ocenjenih statističnih lastnosti šuma, so izračunane variance slučajnih spremenljivk ter njihove kovariance skoraj gotovo napačne. Ocenjena kovariančna matrika korekcije $\hat{\mathbf{P}}(k)$ je konsistentna, če velja $\hat{\mathbf{P}}(k) - \tilde{\mathbf{P}}(k) \geq 0$. $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ označuje resnično kovariančno matriko korekcije. Razliko obeh matrik se da zapisati kot sledi [30]

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{P}}(k) - \tilde{\mathbf{P}}(k) = & (\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))(\tilde{\mathbf{P}}(k) - \tilde{\tilde{\mathbf{P}}}(k))(\mathbf{I} - \mathbf{K}(k)\mathbf{H}(k))^T + \\ & + \mathbf{K}(k)(\mathbf{R}(k) - \bar{\mathbf{R}}(k))\mathbf{K}(k)^T. \end{aligned} \quad (3.47)$$

$\mathbf{K}(k)$ in $\mathbf{H}(k)$ sta matrika ojačanj ter matrika prenosov šumov, ki nastopata v korekcijskem delu EKF-a (3.7). $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ je ocena kovariančne matrike predikcije (2.4), $\tilde{\tilde{\mathbf{P}}}(k)$ pa je resnična kovariančna matrika predikcije. $\mathbf{R}(k)$ je ocena kovariančne matrike izhodnega vektorja procesa (3.7, 3.9), $\bar{\mathbf{R}}(k)$ pa označuje resnično kovariančno matriko izhodnega vektorja. Zadosten pogoj, da je razlika matrik

$\hat{\mathbf{P}}(k) - \hat{\tilde{\mathbf{P}}}(k)$ pozitivno definitna je naslednji

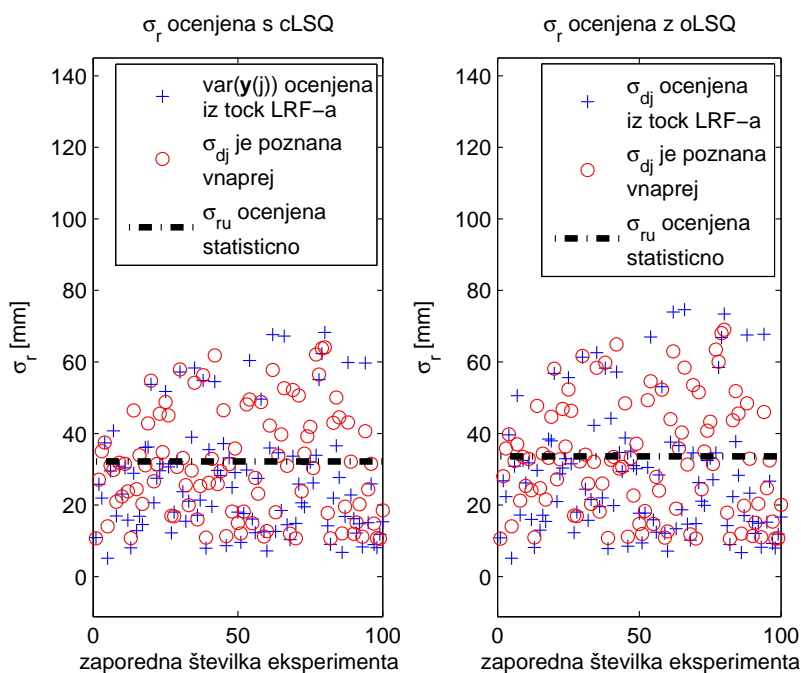
$$\tilde{\mathbf{P}}(k) - \hat{\tilde{\mathbf{P}}}(k) \geq 0 \text{ in } \mathbf{R}(k) - \bar{\mathbf{R}}(k) \geq 0. \quad (3.48)$$

Prvi pogoj smo obravnavali že v prejšnjem poglavju. Drugi pogoj pa zahteva, da je ocena kovariančne matrike izhodnega vektorja procesa $\mathbf{R}(k)$ (3.7, 3.9) konsistentna oziroma, da je ocenjena negotovost izhodnega vektorja $\mathbf{z}(k)$ (3.3) večja ali enaka dejanski negotovosti tega vektorja.

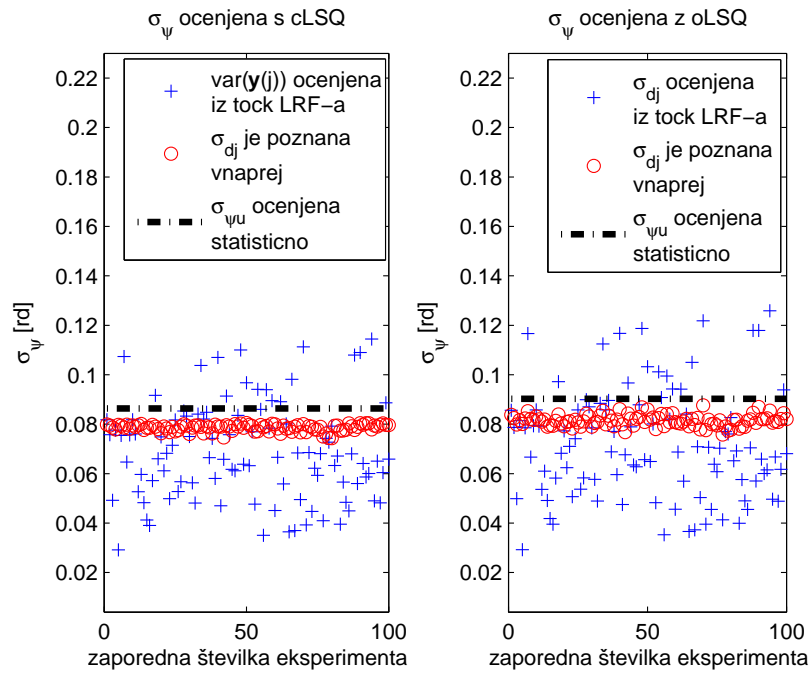
Variance parametrov premic $var(r)$ ter $var(\psi)$ predstavljajo diagonalne člene izhodne kovariančne matrike EKF-a $\mathbf{R}(k)$ (3.9). Na slikah 3.10 ter 3.11 opazimo, da so v primeru, ko so variance vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ (cLSQ, (3.27)) ter standardne deviacije razdalje σ_{d_j} (oLSQ, (3.46)) ocenjene iz točk LRF-a, standardne deviacije parametrov premice $\sqrt{var(r)}$ ter $\sqrt{var(\psi)}$ tudi nižje od referenčnih oziroma resničnih standardnih deviacij $\sqrt{var(r_u)}$ ter $\sqrt{var(\psi_u)}$. V kolikor torej želimo bolj konzervativno oceno izhodne kovariančne matrike $\mathbf{R}(k)$ (3.9), lahko ocenjenim standardnim deviacijam premic $\sqrt{var(r)}$ ter $\sqrt{var(\psi)}$ prištejemo določeno vrednost, ki je večja od nič.

Pravkar opisan simulacijski eksperiment smo ponovili še pri parametrih normalne enačbe premice $r_e = 3.3m$ in $\psi_e = \frac{\pi}{2}rad$. Daljico iz okolja smo simulirali pri kotih laserskih žarkov $\theta_s(j) = 92^\circ, 93^\circ, \dots, 99^\circ$. Daljica je torej definirana z $n = 8$ točkami, njena dolžina pa znaša približno $40cm$. Standardne deviacije napak razdalj ter kotov, ki so izmerjeni z LRF-om, so v simulaciji nastavljene na isto vrednost kot v predhodnem eksperimentu $\sigma_{d_j} = 30mm$ ter $\sigma_{\theta_j} = 0rd$. V primeru, ko sta standardni deviaciji razdalje σ_{d_j} (3.35) pri metodi oLSQ podani vnaprej, sta nastavljena na resnični oziroma simulirani vrednosti $30mm$ in $0rd$. Pri metodi cLSQ pa je v tem primeru varianca vertikalne napake $var(\mathbf{y}(j))$ (3.43) izračunana iz resničnih vrednosti standardnih deviacij $\sigma_{d_j} = 30mm$ ter $\sigma_{\theta_j} = 0rd$. Eksperiment ocenjevanja parametrov premice za izračun njihovih referenčnih standardnih deviacij ter kovarianc je bil ponovljen $N_{tr} = 100$ krat, 100 krat pa je bil ponovljen tudi eksperiment ocenjevanja standardnih deviacij ter kovarianc parametrov premice po metodah cLSQ ter oLSQ. Slike 3.13, 3.14 ter 3.15 prikazujejo ocenjene negotovosti parametrov premic. Osredotočimo se na rezultate ocenjevanja standardne deviacije $\sqrt{var(r)}$ (slika 3.13) v prvem primeru, ko sta standardni deviaciji razdalje ter kota σ_{d_j} in σ_{θ_j} pri metodah cLSQ (3.43) ter oLSQ (3.35) podani vnaprej (krogci). Osredotočimo se še na drugi primer,

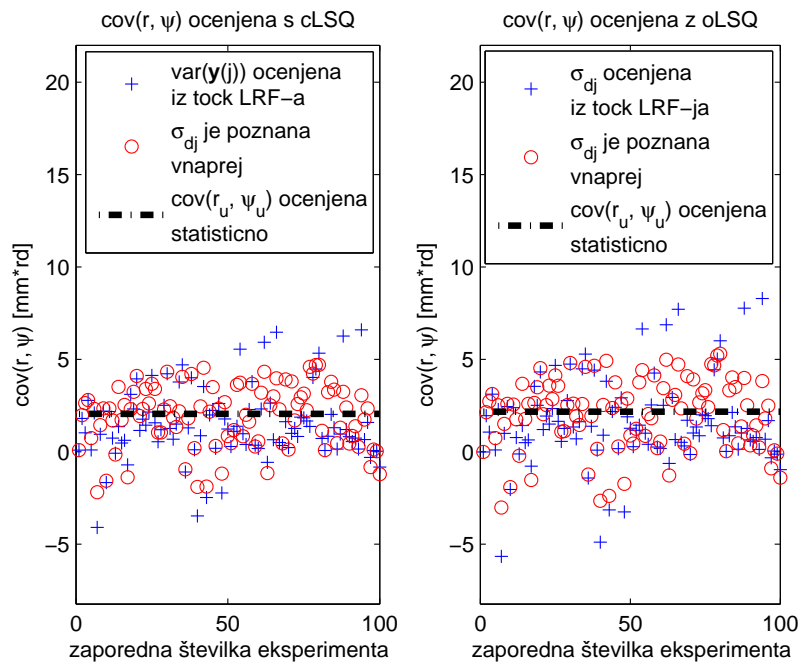
ko sta varianca vertikalne napake $\text{var}(\mathbf{y}(j))$ (metoda cLSQ, 3.27) ter standardna deviacija σ_{d_j} (metoda oLSQ, 3.46) ocenjeni iz točk daljice (križci). Opazimo da so napake ocen standardnih deviacij $\sqrt{\text{var}(r)}$ (slika 3.13) v prvem primeru kljub temu, da sta standardni deviaciji razdalje ter kota nastavljeni na resnično vrednost $\sigma_{d_j} = 30\text{mm}$ ter $\sigma_{\theta_j} = 0\text{rd}$, skoraj tako velike kot v drugem primeru. Pri metodah cLSQ ter oLSQ torej nastavitev vnaprej podanih standardnih deviacij razdalje ter kota σ_{d_j} in σ_{θ_j} na resnično vrednost še ne zagotavlja točnosti ocenjenih standardnih deviacij $\sqrt{\text{var}(r)}$. Opazimo tudi, da so vrednosti ocenjenih standardnih deviacij $\sqrt{\text{var}(r)}$ (slika 3.13) tako v prvem kot v drugem primeru pod vrednostma referenčnih oziroma resničnih standardnih deviacij $\sigma_{ru} = \sqrt{\text{var}(r_u)}$. Konsistenca ocenjene izhodne kovariančne matrike EKF-a $\mathbf{R}(k)$ (3.7, 3.9) torej ni zagotovljena niti v primeru, ko sta pri metodah cLSQ ter oLSQ standardni deviaciji razdalje ter kota σ_{d_j} in σ_{θ_j} podani vnaprej in nastavljeni na resnično vrednost.



Slika 3.13: Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_r = \sqrt{\text{var}(r)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.



Slika 3.14: Rezultati ocenjevanja standardne deviacije premice $\sigma_\psi = \sqrt{\text{var}(\psi)}$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.



Slika 3.15: Rezultati ocenjevanja kovariance parametrov premice $\text{cov}(r, \psi)$ pri uporabi metod cLSQ ter oLSQ. Daljica je definirana z 8 točkami.

4. Eksperimentalni rezultati lokalizacije

4.1 Rezultati lokalizacije z uporabo EKF-a

V tem poglavju bomo načrtan algoritem za lokalizacijo mobilnega robota, ki sloni na EKF-u, uporabili na mobilnem robotu Pioneer 3-AT v strukturiranem okolju znotraj stavbe. Mobilni robot Pioneer 3-AT je opremljen z enkoderji za meritve kotnih hitrosti koles, Sick LMS200 laserskim senzorjem razdalj in prenosnim računalnikom. Lokalizacijski algoritem je implementiran v programskem jeziku c++.

Za predikcijo lege robota (2.4) je uporabljen kinematičen model gibanja, ki je prikazan v (2.1). V predikcijskem delu EKF-a je potrebno oceniti vhodno kovariančno matriko EKF-a $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.4). Strukturo matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ definiramo kot je prikazano v (2.9). V poglavju 2.1.1 smo za konzervativno oceno parametra α matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.9) izbrali približno območje vrednosti $\alpha \geq 0.12$. Parameter α nastavimo na vrednost 0.12. Parameter δ matrike $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.9) pa nastavimo na vrednost 0.001. Ustreznost nastavitve vhodne kovariančne matrike bomo testirali z izvedbo eksperimenta lokalizacije mobilnega robota. Kovariančno matriko predikcijske ocene stanja $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4) smo nastavili na začetno vrednost kot sledi

$$\tilde{\mathbf{P}}(0) = \begin{bmatrix} (300mm)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (300mm)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (15^\circ)^2 \end{bmatrix}. \quad (4.1)$$

V korekcijskem delu EKF-a kovariance parametrov vseh premic iz trenutnega zemljevida okolja, za katere so najdene skladne daljice iz globalnega zemljevida, sestavljajo izhodno kovariančno matriko EKF-a $\mathbf{R}(k)$ (3.7, 3.9). Daljica iz okolja je opisana z ocenjenima parametroma normalne enačbe premice (3.21). Kovariance parametrov premic oziroma elemente izhodne kovariančne matrike EKF-a

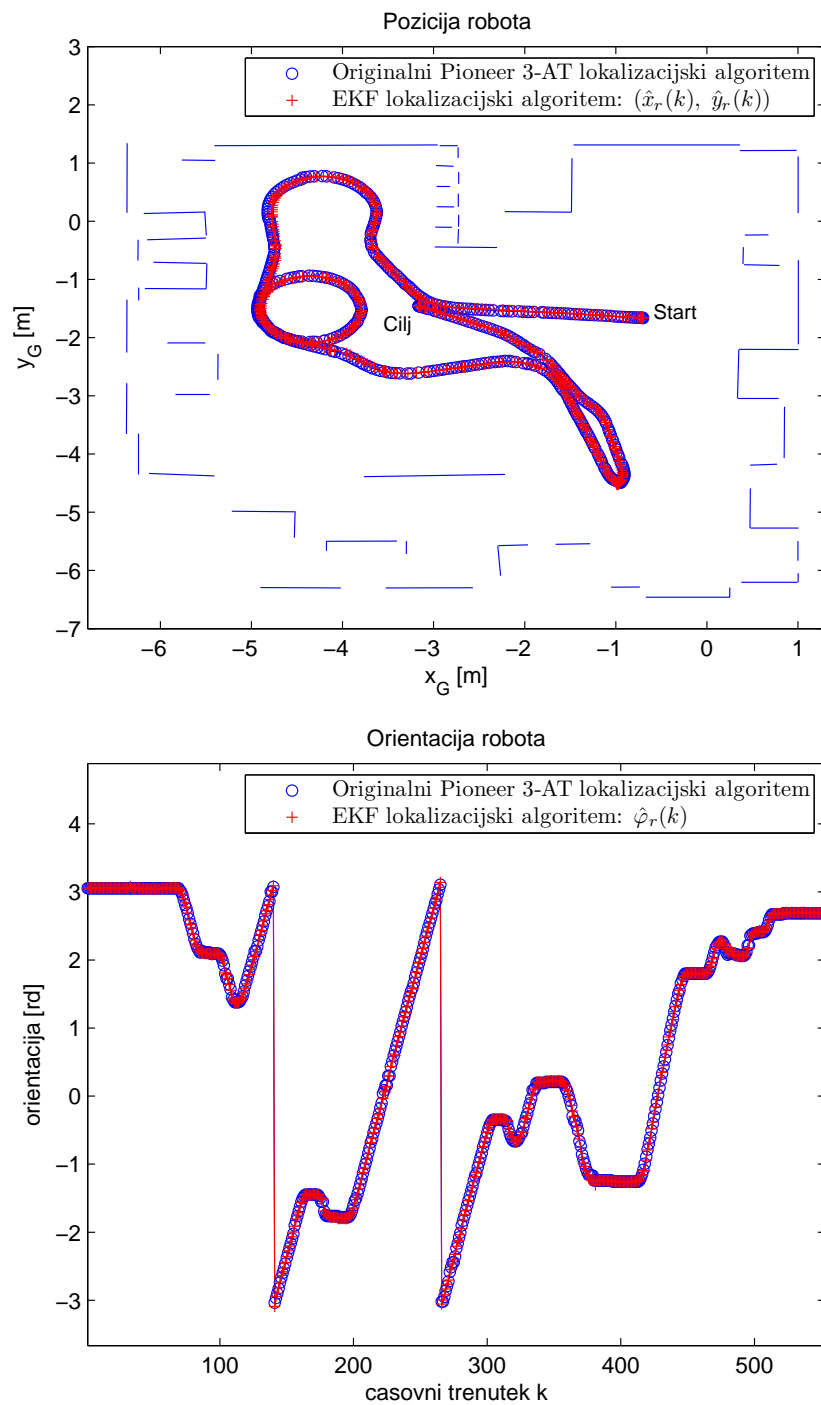
ocenimo s predlagano metodo (3.33), ki izhaja iz navadnih LSQ. Z eksperimentom lokalizacije bomo testirali uporabnost predlagane metode za ocenjevanje kovari-
anc parametrov premic za namen lokalizacije mobilnega robota s pomočjo EKF-a.

Med eksperimentom lokalizacije smo robota peljali po sobi, ki večinoma sestoji iz ravnih sten in drugih objektov z ravnimi robovi. Na sliki 4.1a so prikazane daljice iz globalnega zemljevida okolja. Prag, ki definira največjo možno razdaljo med dvema zaporednima točkama daljice, je nastavljen na vrednost $T_S = 15cm$. Minimalno število točk, ki še definira daljico v trenutnem zemljevidu okolja, je nastavljeno na vrednost $N_{min} = 5$. Prag, ki definira najmanjšo možno dolžino daljice, pa je nastavljen na vrednost $T_d = 10cm$. Za iskanje skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida smo uporabili strategijo, ki je opisana v zadnjem odstavku poglavja 3.1. Za izbiro dveh najbolj podobnih daljic smo torej uporabili pogoj (3.16). Za izbiro skladnih daljic pa smo uporabili kriterij (3.17), kjer smo pragove nastavili na vrednosti $T_r = 30^2cm^2$, $T_\psi = (\frac{\pi}{6})^2rd^2$ ter $T = 30^2cm^2$. Parametra kinematičnega modela R in L (2.1, 2.2) smo ocenili eksperimentalno na vrednosti $R = 10.9cm$ in $L = 57.3cm$. Čas T v kinematičnem modelu (2.1) je čas med dvema zaporednima posnetkoma okolja z LRF-om. Ta čas smo ob vsakem prihodu podatkov iz sensorja LRF v tok izvajanja algoritma izmerili in je znašal okoli $100ms$.

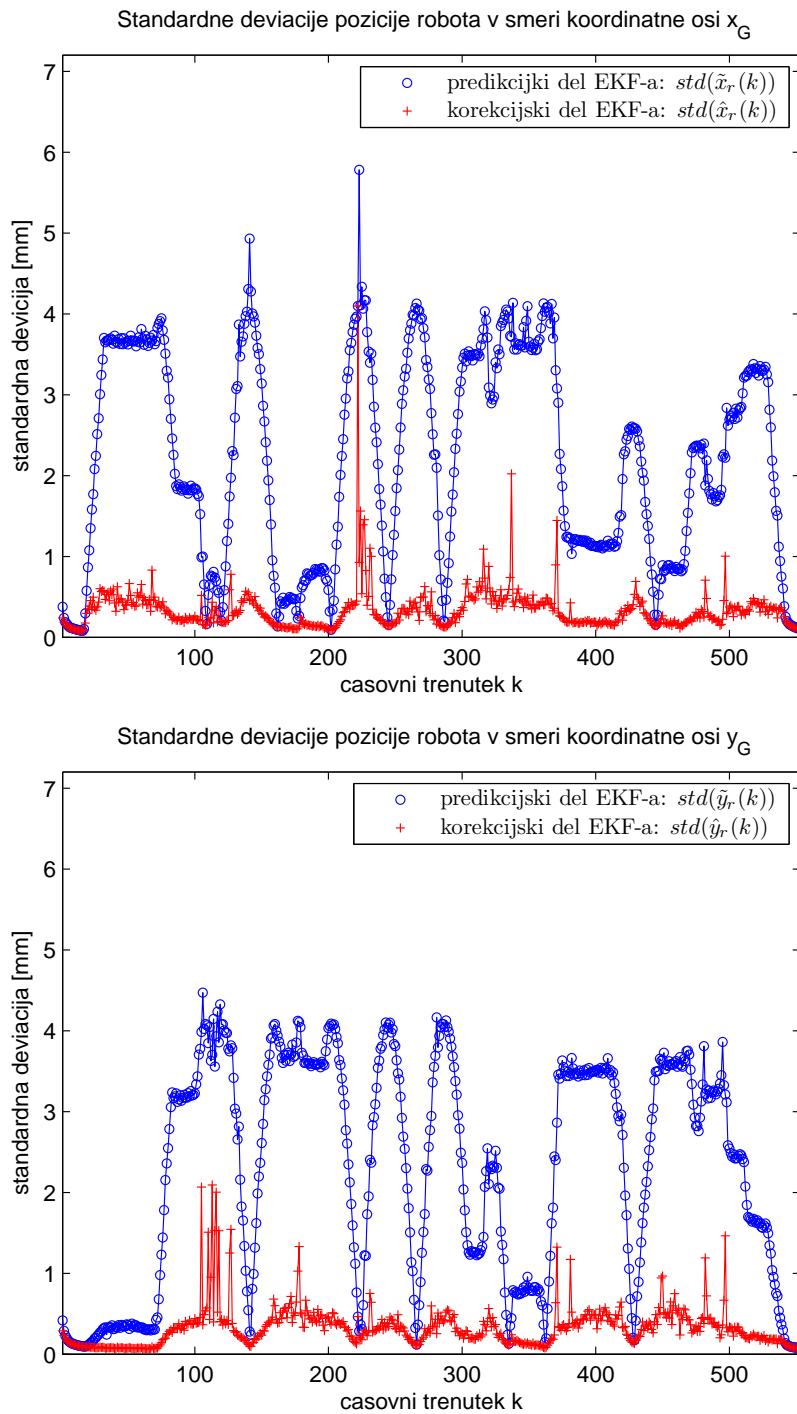
Robota smo vozili s tangencialno hitrostjo okoli $v(k) = 0.425m/s$. Ko je robot zavijal, je njegova kotna hitrost znašala približno $\omega(k) = 41.5^\circ/s$, ko pa se je vrtel okoli svoje osi ($v(k) = 0m/s$) pa $\omega(k) = 59.5^\circ/s$. Slika 4.6 za vsak časovni trenutek k prikazuje meritvi kotnih hitrosti levega ter desnega para koles robota $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$ (2.1, 2.2).

Sliki 4.1a in 4.1b prikazujeta lego robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k) = [\hat{x}_r(k), \hat{y}_r(k), \hat{\varphi}_r(k)]^T$ (3.6) ocenjeno z EKF-om. To lego primerjamo z lego robota, ki je ocenjena z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. Prikazani legi, ki sta ocenjeni z obema algoritmoma, se med seboj dobro ujemata.

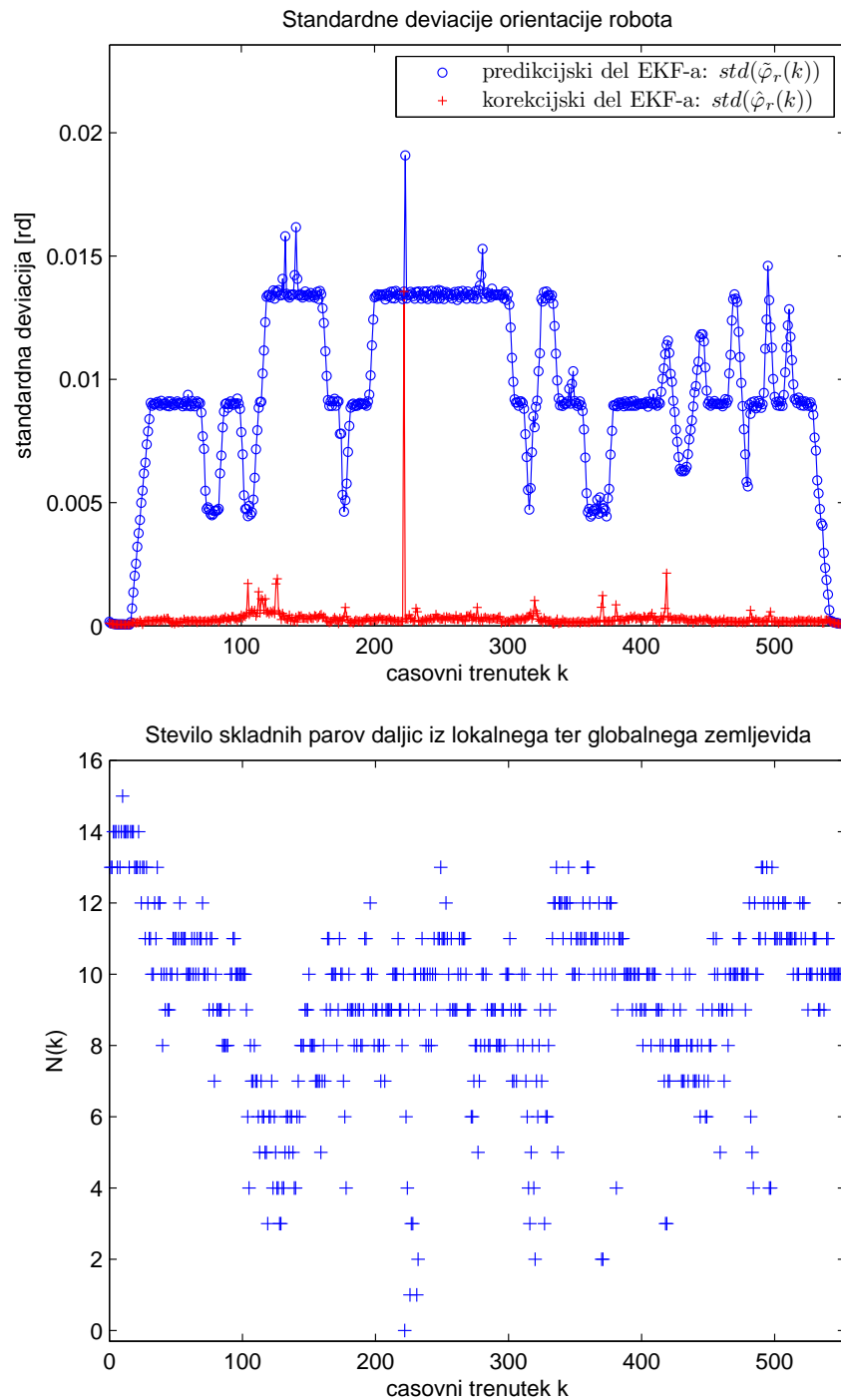
Slike 4.2a, 4.2b in 4.3a za vsak časovni trenutek k prikazujejo standardne deviacije napake predikcijske ocene lege robota $std(\tilde{x}_r(k))$, $std(\tilde{y}_r(k))$ in $std(\tilde{\varphi}_r(k))$, ki so dobljene iz pripadajoče kovariančne matrike $\hat{\mathbf{P}}(k)$ (3.7). Slike 4.2a, 4.2b in 4.3a prikazujejo tudi standardne deviacije napake korekcijske ocene lege robota $std(\hat{x}_r(k))$, $std(\hat{y}_r(k))$ ter $std(\hat{\varphi}_r(k))$, ki so dobljene iz pripadajoče kovariančne



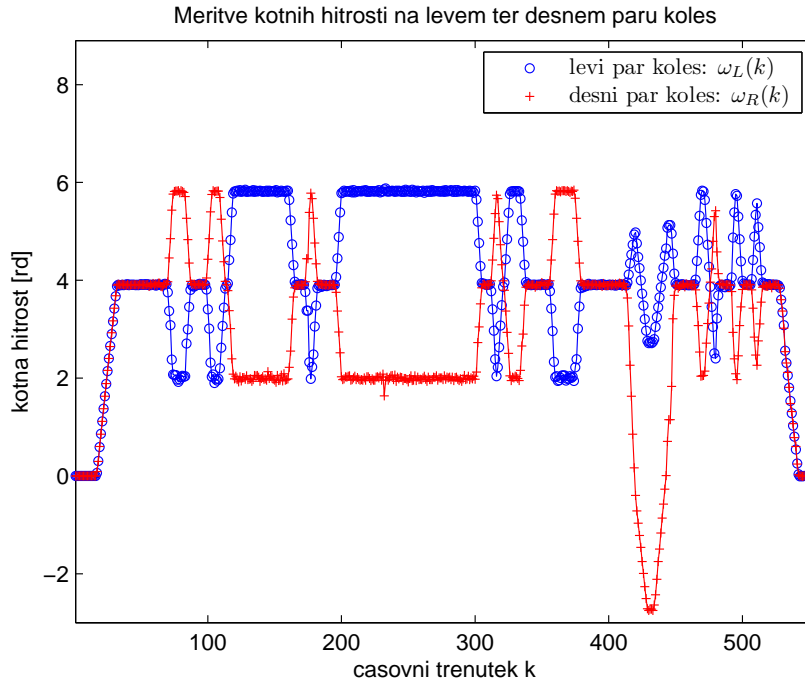
Slika 4.1: a) Primerjava med pozicijo robota $(\hat{x}_r(k), \hat{y}_r(k))$ ocenjeno z EKF-om ter pozicijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. b) Primerjava med orientacijo robota $\hat{\phi}_r(k)$ ocenjeno z EKF-om ter orientacijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom.



Slika 4.2: a) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene pozicije robota $std(\tilde{x}_r(k))$ in $std(\hat{x}_r(k))$ v smeri koordinatne osi x_G . b) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene pozicije robota $std(\tilde{y}_r(k))$ in $std(\hat{y}_r(k))$ v smeri koordinatne osi y_G .



Slika 4.3: a) Standardni deviaciji predikcijske ter korekcijske ocene orientacije robota $std(\tilde{\varphi}_r(k))$ in $std(\hat{\varphi}_r(k))$. b) Število parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida $N(k)$ med eksperimentom lokalizacije.



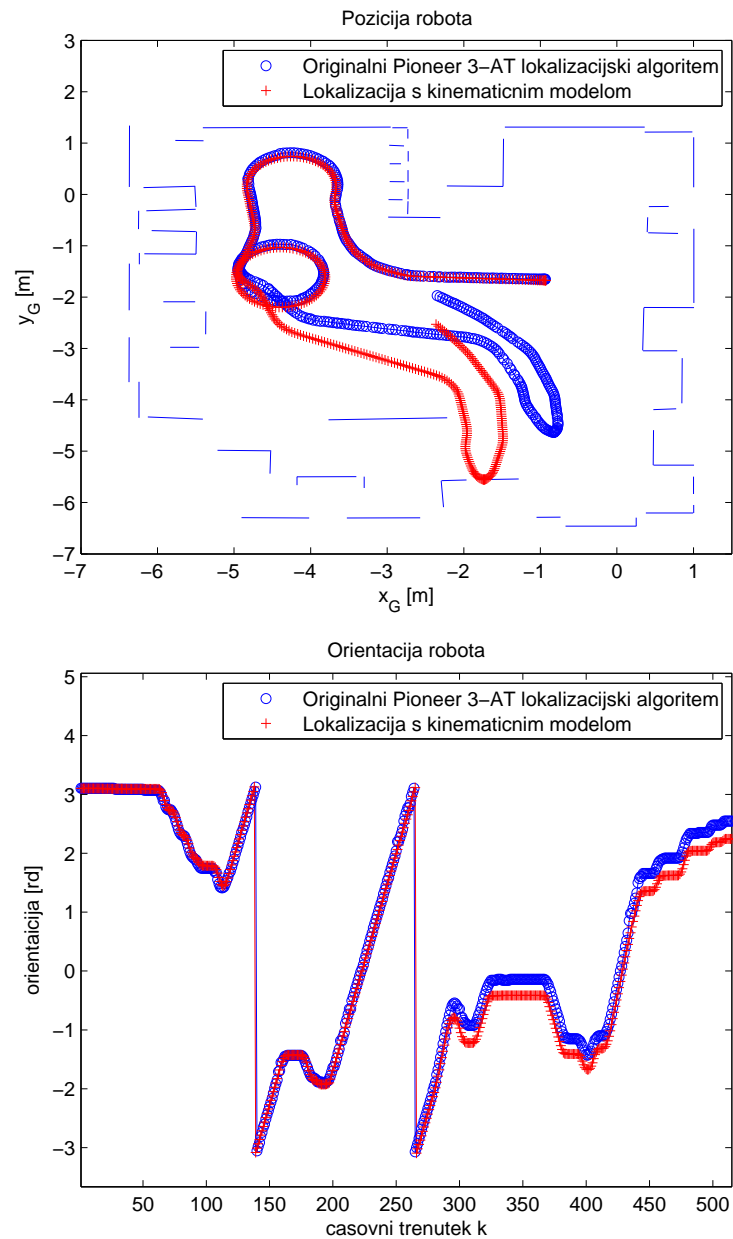
Slika 4.4: Meritve kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$.

matrike $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ (2.4). Slika 4.3b prikazuje, da je bilo med eksperimentom število parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida $N(k)$ (3.3) v povprečju dokaj veliko. Opazimo, da v trenutku $k = 220$ robot ni našel nobenega para skladnih daljic ($N(220) = 0$), zaradi česar korekcijski del EKF-a ni bil izvršen. V tem trenutku je bila zato korekcijski oceni lege robota pripisana aktualna predikcijska ocena $\hat{\mathbf{x}}_p(k) = \tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (3.6). Kovariančni matriki napake korekcije pa je bila prav tako pripisana kovariančna matrika napake predikcije $\hat{\mathbf{P}}(k) = \tilde{\mathbf{P}}(k)$ (3.7). To je razvidno iz slik 4.2a, 4.2b ter 4.3a, kjer so v trenutku $k = 220$ standardne deviacije napake korekcije $std(\hat{x}_r(k))$, $std(\hat{y}_r(k))$ in $std(\hat{\varphi}_r(k))$ enake standardnim deviacijam napake predikcije $std(\tilde{x}_r(k))$, $std(\tilde{y}_r(k))$ in $std(\tilde{\varphi}_r(k))$.

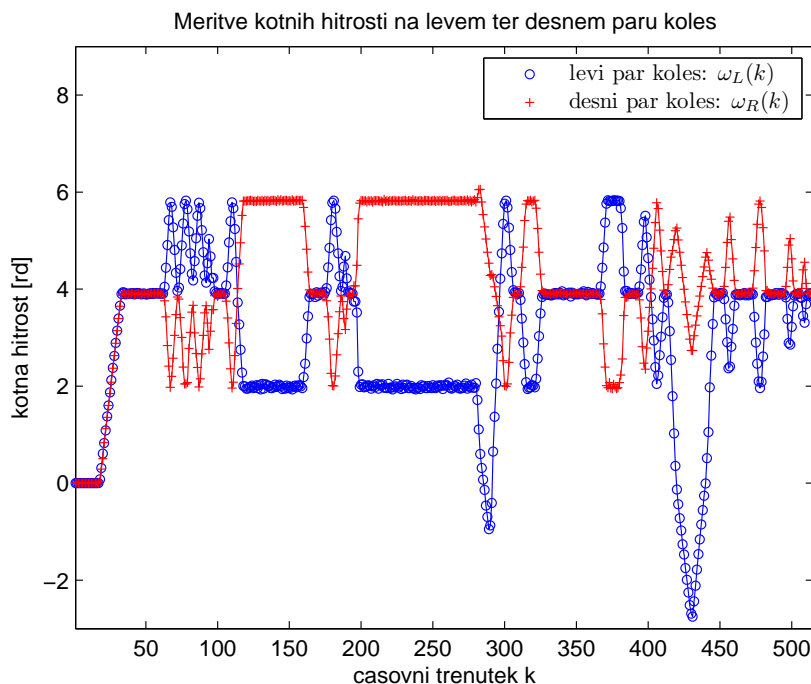
4.2 Rezultati lokalizacije z odometrijo

Izvedli smo tudi eksperiment lokalizacije, pri čemer smo lego robota ocenjevali le s simulacijo kinematičnega modela gibanja (2.1), ki ima na vходу meritvi kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_L(k)$ in $\omega_D(k)$ (slika 4.6). Parametra

kinematičnega modela R in L (2.1) sta nastavljena na isto vrednost kot v pravkar opisanem eksperimentu $R = 10.9\text{cm}$ in $L = 57.3\text{cm}$. Čas T v kinematičnem



Slika 4.5: a) Primerjava med pozicijo robota ocenjeno s simulacijo kinematičnega modela ter pozicijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. b) Primerjava med orientacijo robota ocenjeno s simulacijo kinematičnega modela ter orientacijo ocenjeno z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom.



Slika 4.6: Meritve kotnih hitrosti levega ter desnega para koles $\omega_L(k)$ in $\omega_R(k)$.

modelu (2.1) pa smo prav tako kot v predhodnem eksperimentu merili in je znašal okoli $100ms$. Robota smo vozili s podobno tangencialno ter kotno hitrostjo kot v predhodnem eksperimentu. Sliki 4.5a in 4.5b prikazujeta lego robota ocenjeno s kinematičnim modelom gibanja oziroma z odometrijo ter referenčno lego, ki je ocenjena z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. Iz prikazanih rezultatov je razvidno, da se lega robota ocenjena z odometrijo po prvih nekaj metrih vožnje dobro ujema z referenčno lego. Nato pa opazimo, da zaradi napake v orientaciji robota od časovnega trenutka okoli $k = 300$ naprej (slika 4.5b) ocenjena pozicija odstopa od referenčne pozicije (slika 4.5a).

Eksperimentalni rezultati torej potrjujejo, da lahko z integracijo informacije iz enkoderjev ter sensorja LRF, ki je izvedena s pomočjo EKF-a, izboljšamo oceno lege robota v primerjavi z lokalizacijo, ko je uporabljena le odometrija.

5. Sprotno ocenjevanje parametrov asimetričnega kinematičnega modela

5.1 Asimetričen ter simetričen kinematičen model gibanja robota

Za predikcijo lege robota Pioneer 3-AT smo v našem delu uporabili kinematičen modela gibanja robota (2.1, 2.2), ki ima na vhodu kotni hitrosti levega ter desnega para koles. S problematiko izbire primerne strukture kinematičnega modela gibanja mobilnega robota Pioneer 3-AT ter identifikacije parametrov modela so se ukvarjali v delu [37]. V predhodnem delu [39] je bil izpeljan kinematičen model gibanja za gosenično vozilo, ki zavija z zdrsavanjem tako, da se leva gosenica vrti z drugačno hitrostjo kot desna. Avtorji so v [37] isti kinematični model uporabili za dvokolesni mobilni robot Pioneer 3-AT. Ta zavija z zdrsavanjem podobno kot gosenično vozilo tako, da levi kolesi vrti z drugačno hitrostjo kot desni. V tem odstavku navajamo kinematični model gibanja robota predlagan v [37] kot sledi. Koordinatno izhodišče sistema robota naj bo v geometrijskem središčem področja, ki je definirano s površinami stikov vseh gum s podlago (Slika 2.1). Kinematičen model gibanja goseničnega vozila oziroma dvokolesnega robota Pioneer 3-AT je definiran z dvema točkama v koordinatnem sistemu robota ICR_l in ICR_r (slika 2.1) ter še z dvema multiplikativnima konstantama za tangencialni hitrosti levega in desnega para koles. Efekt dinamike mobilnega robota je v kinematičnem modelu vpeljan s samo dvema točkama ICR_l in ICR_r . Lega teh dveh točk se torej med gibanjem robota spreminja, vendar točki ležita znotraj omejenega območja pri zmernih hitrostih robota. Lega obeh točk je odvisna tudi od terena po katerem se vozi robot ter od geometrijskih in mehanskih značilnosti robota (porazdelitev mase, napihnenost gum). Večje kot je zdrsavanje koles robota, dlje od robota v smeri koordinate x_R ležita točki ICR_l in ICR_r (Slika 2.1). Pri

idealnem dvokolesnem robotu pri zavijanju ne prihaja do zdrsavanja zato ti dve točki sovpadata s točkama kjer se kolesi dotikata tal. Kinematični model gibanja mobilnega robota Pioneer 3-AT, ki je predlagan v [37], je zato ekvivalenten kinematičnemu modelu gibanja idealnega dvokolesnega robota, pri čemer je lega koles idealnega robota definirana s točkama ICR_l ter ICR_r (Slika 2.1). Levo in desno kolo ekvivalentnega dvokolesnega robota se vrtita z enako tangencialno hitrostjo kot levi in desni kolesi robota Pioneer 3-AT. Če je razporeditev mase robota neenakomerna, je pritisk na posamezne gume različen in tam kjer je manjši gume bolj zdrsavajo. Zato sta v splošnem y_R koordinati točk ICR_l ter ICR_r različni od nič, vendar hkrati velja, da sta enaki [39]. Neenakomerno porazdeljena masa robota oziroma različen pritisk na posamezne gume pa prav tako povzroči, da sta absolutni vrednosti x_R koordinat točk $|x_{ICR_r}|$ in $|x_{ICR_l}|$ v splošnem različni. To je torej asimetrični kinematični model. V kolikor sta y_R koordinati točk enaki nič, absolutni vrednosti x_R koordinat točk pa enaki ($x_{ICR} = |x_{ICR_r}| = |x_{ICR_l}|$), se kinematični model imenuje simetrični. Tedaj je razdalja med kolesoma ekvivalentnega dvokolesnega robota enaka $L = 2x_{ICR}$. Kinematični model (2.1, 2.2), ki smo ga uporabili za naš mobilni robot, je v tem pogledu torej simetričen. Parametre simetričnega kinematičnega modela so avtorji dela [37] identificirali eksperimentalno. Ko se je robot peljal po asfaltu in pritisk v gumah ni bil zelo visok je bil parameter x_{ICR} ocenjen na $27.5cm$. To ustreza razdalji med kolesoma ekvivalentnega dvokolesnega robota $L = 2x_{ICR} = 55cm$ (2.1), kar je podobno našemu rezultatu $L = 58.7cm$ oziroma $L = 57.3cm$. Parametre asimetričnega kinematičnega modela pa so avtorji dela [37] identificirali z genetsko optimizacijo na podlagi predhodnih eksperimentalnih podatkov dobljenih z večkratnimi reprezentativnimi vožnjami po prostoru (ne-sprotna optimizacija). Ko se je robot peljal po asfaltu in pritisk v gumah ni bil zelo visok, je bila razlika med absolutnimi vrednostmi ocenjenih parametrov $|x_{ICR_r}| = 30.7cm$ in $|x_{ICR_l}| = 25.5cm$ približno $5cm$ (merilo za asimetričnost), kar ni zanemarljivo. Pri vožnji po betonu ($|x_{ICR_r}| = 29.0cm$ in $|x_{ICR_l}| = 27.7cm$) je bila ta razlika manjša. y_R koordinati točk ICR_l ter ICR_r sta bili vedno okoli $-1cm$. Če koordinatni sistem robota premaknemo za $-1cm$ glede na os y_R , lahko predpostavimo, da imata y_R koordinati točk ICR_l ter ICR_r vrednost $0cm$. Tedaj lahko asimetrični kinematični

model gibanja robota zapišemo kot sledi [37]

$$\begin{aligned}x_r(k+1) &= x_r(k) + T * v(k) \cos(\varphi_r(k)), \\y_r(k+1) &= y_r(k) + T * v(k) \sin(\varphi_r(k)), \\ \varphi_r(k+1) &= \varphi_r(k) + T * \omega(k),\end{aligned}\tag{5.1}$$

$$\begin{aligned}v(k) &= \frac{1}{x_{ICRr} - x_{ICRl}} (-x_{ICRl} * \alpha_r v_r(k) + x_{ICRr} * \alpha_l v_l(k)), \\ \omega(k) &= \frac{1}{x_{ICRr} - x_{ICRl}} (\alpha_r v_r(k) - \alpha_l v_l(k)),\end{aligned}\tag{5.2}$$

kjer parametra x_{ICRl} in x_{ICRr} predstavljata x_R koordinati točk ICR_l ter ICR_r . $v_r(k)$ ter $v_l(k)$ sta meritvi tangencialnih hitrosti levega ter desnega para koles. α_l ter α_r pa sta multiplikativni konstanti za tangencialni hitrosti levega in desnega para koles, ki sta odvisni od napihnjnosti gum.

5.2 Sprotno ocenjevanje parametrov asimetričnega modela s pomočjo EKF-a

Kot je razvidno iz vira [37] sta optimalni vrednosti parametrov asimetričnega kinematičnega modela gibanja robota x_{ICRl} in x_{ICRr} (5.1, 5.2) odvisni od podlage, po kateri se pelje robot, razporeditve mase robota ter dinamike gibanja robota. Optimalni vrednosti omenjenih parametrov se torej med gibanjem robota po prostoru lahko spreminjata. Zato v našem delu predlagamo, da naj se med samim procesom lokalizacije parametra asimetričnega modela x_{ICRl} in x_{ICRr} ocenjujeta sprotno. Na ta način pričakujemo, da bi se parametra lahko prilagajala različnim podlagam in različnim porazdelitvam mase glede na levo ter desno stran robota. V [18] so s pomočjo EKF-a podobno kot v našem primeru ocenjevali lego vozila, ki zavija kot avtomobil. Pri tem so z istim EKF-om kot dodatno spremenljivko stanja sprotno ocenjevali tudi parameter kinematičnega modela (radij kolesa).

V kolikor bi na našem mobilnem robotu za predikcijo lege uporabili asimetrični kinematični model gibanja (5.1, 5.2), bi lahko po istem kopitu, kot so v [18] ocenjevali parameter kinematičnega modela, poskusili sprotno ocenjevati parametra asimetričnega modela x_{ICRl} in x_{ICRr} . Zapišimo enačbe ter matrike predikcijskega dela EKF-a, kjer sta parametra x_{ICRl} in x_{ICRr} definirana kot novi spremenljivki stanja $\mathbf{x}_p(k) = [x_r(k), y_r(k), \varphi_r(k), x_{ICRr}(k), x_{ICRl}(k)]^T$.

Predikcijski del EKF – a

Predikcijo stanja izvedemo s simulacijo asimetričnega kinematičnega modela gibanja robota kot sledi.

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathbf{x}}_p(k) &= \mathbf{f}_a(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1)) : \\
\tilde{x}_r(k) &= \hat{x}_r(k-1) + T * \hat{v}(k-1) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
\tilde{y}_r(k) &= \hat{y}_r(k-1) + T * \hat{v}(k-1) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
\tilde{\varphi}_r(k) &= \hat{\varphi}_r(k-1) + T * \hat{\omega}(k-1) \\
\tilde{x}_{ICRr}(k) &= \hat{x}_{ICRr}(k-1), \\
\tilde{x}_{ICRl}(k) &= \hat{x}_{ICRl}(k-1),
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$\begin{aligned}
\hat{v}(k-1) &= \frac{1}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} (-\hat{x}_{ICRl}(k-1) * \alpha_r v_r(k-1) + \\
&\quad + \hat{x}_{ICRr}(k-1) * \alpha_l v_l(k-1)), \\
\hat{\omega}(k-1) &= \frac{1}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} (\alpha_r v_r(k-1) - \alpha_l v_l(k-1)), \\
\mathbf{u}(k-1) &= [v_r(k-1), v_l(k-1)]^T.
\end{aligned} \tag{5.4}$$

Kovariančna matrika napake predikcije $\tilde{\mathbf{P}}(k)$ je ocenjena z enačbo (2.4), pri čemer se ustrezno spremenijo dimenzije ter vrednosti matrik $\hat{\mathbf{P}}(k-1)$, $\mathbf{A}(k)$, $\mathbf{Q}(k-1)$ ter $\mathbf{W}(k)$. Elementi matrike $\mathbf{A}(k)$ so naslednji.

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ij}(k) &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}_{a_i}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{p_j}(k-1)} \right|_{(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow \\
\mathbf{A}(k) &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & A_{13} & A_{14} & A_{15} \\ 0 & 1 & A_{23} & A_{24} & A_{25} \\ 0 & 0 & 1 & A_{34} & A_{35} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
\end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned}
 A_{13} &= \frac{T}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} * (\hat{x}_{ICRl}(k-1)\alpha_r v_r(k-1) - \\
 &\quad - \hat{x}_{ICRr}(k-1)\alpha_l v_l(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
 A_{14} &= \frac{T\hat{x}_{ICRl}(k-1)}{(\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1))^2} * (\alpha_r v_r(k-1) - \alpha_l v_l(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), \quad (5.6) \\
 A_{15} &= \frac{T\hat{x}_{ICRr}(k-1)}{(\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1))^2} * (-\alpha_r v_r(k-1) + \\
 &\quad + \alpha_l v_l(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
 A_{23} &= \frac{T}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} * (-\hat{x}_{ICRl}(k-1)\alpha_r v_r(k-1) + \\
 &\quad + \hat{x}_{ICRr}(k-1)\alpha_l v_l(k-1)) \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
 A_{24} &= \frac{T\hat{x}_{ICRl}(k-1)}{(\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1))^2} * (\alpha_r v_r(k-1) - \alpha_l v_l(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \\
 A_{25} &= \frac{T\hat{x}_{ICRr}(k-1)}{(\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1))^2} * (-\alpha_r v_r(k-1) + \alpha_l v_l(k-1)) \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \quad (5.7) \\
 A_{34} &= \frac{T}{(\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1))^2} * (-\alpha_r v_r(k-1) + \alpha_l v_l(k-1)), \\
 A_{35} &= -A_{34}.
 \end{aligned}$$

Oceniti je potrebno tudi vhodno kovariančno matriko EKF-a $\mathbf{Q}(k-1)$. $\mathbf{Q}(k-1)$ definiramo kot kovariančno matriko vektorja napake $\mathbf{n}(k)$, ki zajema šum na vходу v sistem in negotovosti pri ocenjevanju parametrov kinematičnega modela gibanja robota. Določimo najprej člene vektorja napake $\mathbf{n}(k)$. Model napak predikcijskih ocen parametrov $\tilde{x}_{ICRr}(k)$ ter $\tilde{x}_{ICRl}(k)$ (5.3) definiramo kot sledi

$$\begin{aligned}
 \hat{x}_{ICRr}(k-1) &= x_{ICRrt}(k-1) + \hat{x}_{ICRrn}(k-1), \\
 x_{ICRrt}(k) &= x_{ICRrt}(k-1) - T * x_{Irn}(k-1) \Rightarrow \\
 \tilde{x}_{ICRr}(k) &= \hat{x}_{ICRr}(k-1) = x_{ICRrt}(k) + \hat{x}_{ICRrn}(k-1) + T * x_{Irn}(k-1), \\
 \hat{x}_{ICRl}(k-1) &= x_{ICRlt}(k-1) + \hat{x}_{ICRln}(k-1), \quad (5.8) \\
 x_{ICRlt}(k) &= x_{ICRlt}(k-1) - T x_{Il_n}(k-1) \Rightarrow \\
 \tilde{x}_{ICRl}(k) &= \hat{x}_{ICRl}(k-1) = x_{ICRlt}(k) + \hat{x}_{ICRln}(k-1) + T * x_{Il_n}(k-1),
 \end{aligned}$$

pri čemer črka t (npr. $x_{ICRrt}(k-1)$) označuje resnično vrednost spremenljivke, črka n pa šum oziroma napako (npr. $\hat{x}_{ICRrn}(k-1)$) ocene določene spremenljivke (npr. $\hat{x}_{ICRr}(k-1)$). Za vse naključne spremenljivke z oznako n predpostavimo,

da so to beli šumi z ničelnim povprečjem ter normalno porazdelitvijo, kot je zahtevano pri uporabi KF-a. Druga ter peta vrstica v (5.8) sta naključna modela, ki opisujeta spremembo resničnih vrednosti parametrov $x_{ICRrt}(k-1)$ ter $x_{ICRlt}(k-1)$ pri prehodu iz časovnega trenutka $k-1$ v časovni trenutek k . Pri tem šum $x_{Irn}(k-1)$ predstavlja hitrost spreminjanja omenjenega parametra v enotah m/s in ga je zato potrebno množiti s časom T , da dobimo spremembo parametra v časovnih enotah m . Tak naključni model omogoča da se vrednosti parametrov $\hat{x}_{ICRr}(k)$ ter $\hat{x}_{ICRl}(k)$ ocenjeni s pomočjo Kalmanovega filtra sprotno prilagajajo resničnim vrednostim parametrov $x_{ICRrt}(k)$ ter $x_{ICRlt}(k)$ [18], ki se med procesom lokalizacije lahko spreminjajo. Napake izmerjenih spremenljivk $T(k-1)$, $v_r(k-1)$ in $v_l(k-1)$ ter ocenjenih parametrov α_r in α_l pa definiramo kot sledi

$$\begin{aligned}
T(k-1) &= T_t(k-1) + T_n(k-1), \\
\alpha_r v_r(k-1) &= \alpha_{rt}(k-1)v_{rt}(k-1) + \alpha_{rn}(k-1)v_{rn}(k-1), \\
\varepsilon_r(k-1) &= \alpha_r v_r(k-1), \quad \varepsilon_{rt}(k-1) = \alpha_{rt}(k-1)v_{rt}(k-1), \\
\varepsilon_{rn}(k-1) &= \alpha_{rn}(k-1)v_{rn}(k-1), \\
\alpha_l v_l(k-1) &= \alpha_{lt}(k-1)v_{lt}(k-1) + \alpha_{ln}(k-1)v_{ln}(k-1), \\
\varepsilon_l(k-1) &= \alpha_l v_l(k-1), \quad \varepsilon_{lt}(k-1) = \alpha_{lt}(k-1)v_{lt}(k-1), \\
\varepsilon_{ln}(k-1) &= \alpha_{ln}(k-1)v_{ln}(k-1).
\end{aligned} \tag{5.9}$$

V kolikor bi napake izmerjenih spremenljivk $v_r(k-1)$ in $v_l(k-1)$ ter ocenjenih parametrov α_r in α_l obravnavali posebej, bi imel vektor napak $\mathbf{n}(k-1)$ dimenzijo 7×1 , kovariančna matrika tega vektorja $\mathbf{Q}(k-1)$ pa 7×7 . V kinematičnem modelu (5.3, 5.4) opazimo, da spremenljivka $v_r(k-1)$ in parameter α_r vedno nastopata skupaj v produktu $\alpha_r v_r(k-1)$. Enako velja za spremenljivko $v_l(k-1)$ in parameter α_l , ki prav tako vedno nastopata v paru kot produkt $\alpha_r v_r(k-1)$. Zato je smiselno da napaki spremenljivke $v_r(k-1)$ in parametra α_r obravnavamo skupaj kot eno napako $\varepsilon_{rn}(k-1) = \alpha_{rn}(k-1)v_{rn}(k-1)$ (5.9). Enako obravnavamo tudi drugi par napak $\alpha_{ln}(k-1)$ in $v_{ln}(k-1)$ kot eno napako $\varepsilon_{ln}(k-1) = \alpha_{ln}(k-1)v_{ln}(k-1)$. Vektor napak $\mathbf{n}(k-1)$ ima v tem primeru manjšo dimenzijo 5×1 (5.10). Posledično pa ima tudi kovariančna matriko tega vektorja $\mathbf{Q}(k-1)$ manjšo

dimenzijo 5×5 (5.13). Vektor napak $\mathbf{n}(k-1)$ definiramo kot sledi

$$\mathbf{n}(k-1) = [\varepsilon_{rn}(k-1), \varepsilon_{ln}(k-1), T_n(k-1), x_{Irn}(k-1), x_{Iln}(k-1)]^T. \quad (5.10)$$

Produkt parametra α_r ter spremenljivke $v_r(k-1)$ torej obravnavamo kot eno spremenljivko $\varepsilon_r(k-1)$ (5.9). Prav tako produkt parametra α_l ter spremenljivke $v_l(k-1)$ obravnavamo kot eno spremenljivko $\varepsilon_l(k-1)$. Odstopanja $\Delta\varepsilon_r(k-1)$ in $\Delta\varepsilon_l(k-1)$ od resničnih vrednosti $\varepsilon_{rt}(k-1)$ ter $\varepsilon_{lt}(k-1)$ (5.9) lahko s pomočjo linearizacije približno zapišemo kot

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_r(k-1) &\approx \frac{\partial(\alpha_r v_r(k-1))}{\partial v_r(k-1)} \Delta v_r(k-1) + \frac{\partial(\alpha_r v_r(k-1))}{\partial \alpha_r} \Delta \alpha_r = \\ &\quad \alpha_r \Delta v_r(k-1) + v_r(k-1) \Delta \alpha_r, \\ \Delta\varepsilon_l(k-1) &\approx \frac{\partial(\alpha_l v_l(k-1))}{\partial v_l(k-1)} \Delta v_l(k-1) + \frac{\partial(\alpha_l v_l(k-1))}{\partial \alpha_l} \Delta \alpha_l = \\ &\quad \alpha_l \Delta v_l(k-1) + v_l(k-1) \Delta \alpha_l, \end{aligned} \quad (5.11)$$

kjer so $\Delta v_r(k-1)$, $\Delta \alpha_r$, $\Delta v_l(k-1)$ in $\Delta \alpha_l$ odstopanja od resničnih vrednosti $v_{rt}(k-1)$, α_{rt} , $v_{lt}(k-1)$ in α_{lt} (5.9). Z upoštevanjem relacij (5.11) ter statističnih lastnosti naključnih spremenljivk lahko varianci šumov $\varepsilon_{rn}(k-1)$ in $\varepsilon_{ln}(k-1)$ ter kovarianco med šumoma zapišemo kot sledi

$$\begin{aligned} var(\varepsilon_{rn}(k-1)) &= \alpha_r^2 var(v_{rn}(k-1)) + v_r^2(k-1) var(\alpha_{rn}(k-1)) + \\ &\quad + 2\alpha_r v_r cov(v_{rn}(k-1), \alpha_{rn}(k-1)) = \\ &\quad \alpha_r^2 var(v_{rn}(k-1)) + v_r^2(k-1) var(\alpha_{rn}(k-1)), \\ var(\varepsilon_{ln}(k-1)) &= \alpha_l^2 var(v_{ln}(k-1)) + v_l^2(k-1) var(\alpha_{ln}(k-1)) + \\ &\quad + 2\alpha_l v_l cov(v_{ln}(k-1), \alpha_{ln}(k-1)) = \\ &\quad \alpha_l^2 var(v_{ln}(k-1)) + v_l^2(k-1) var(\alpha_{ln}(k-1)), \\ cov(\varepsilon_{rn}(k-1), \varepsilon_{ln}(k-1)) &= \alpha_r \alpha_l cov(v_{rn}(k-1), v_{ln}(k-1)) + \\ &\quad \alpha_r v_l(k-1) cov(v_{rn}(k-1), \alpha_{ln}(k-1)) + \\ &\quad v_r(k-1) \alpha_l cov(\alpha_{rn}(k-1), v_{ln}(k-1)) + \\ &\quad v_r(k-1) v_l(k-1) cov(\alpha_{rn}(k-1), \alpha_{ln}(k-1)) = 0, \\ cov(\varepsilon_{ln}(k-1), \varepsilon_{rn}(k-1)) &= cov(\varepsilon_{rn}(k-1), \varepsilon_{ln}(k-1)) = 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

$v_{rn}(k-1)$ predstavlja napako pri merjenju tangencialne hitrosti desnega para koles, $\alpha_{rn}(k-1)$ pa napako pri ocenjevanju vrednosti parametra α_r , ki je odvisna od napihnjnosti gum. Pri ocenjevanju variance $var(\varepsilon_{rn}(k-1))$ (5.12) smo predpostavili, da je kovarainca med šumoma $v_{rn}(k-1)$ ter $\alpha_{rn}(k-1)$ enaka nič. Podobno smo tudi pri ocenjevanju variance $var(\varepsilon_{ln}(k-1))$ (5.12) za levi par koles predpostavili, da je kovarainca med šumoma $v_{rn}(k-1)$ ter $\alpha_{rn}(k-1)$ enaka nič. Oceniti moramo torej variance $var(v_{rn}(k-1))$, $var(\alpha_{rn}(k-1))$, $var(v_{ln}(k-1))$ ter $var(\alpha_{ln}(k-1))$. Pri ocenjevanju kovariance $cov(\varepsilon_{rn}(k-1), \varepsilon_{ln}(k-1))$ (5.12) pa smo predpostavili, da je kovarianca med meritvama tangencialne hitrosti desnega ter levega para koles $cov(v_{rn}(k-1), v_{ln}(k-1))$ enaka nič. To je upravičena predpostavka, saj sta za meritvi tangencialnih hitrosti levega ter desnega para koles uporabljena različna enkoderja in zato šuma $v_{rn}(k-1)$ ter $v_{ln}(k-1)$ med seboj nista korelirana. Napaki $v_{rn}(k-1)$ in $\alpha_{rn}(k-1)$ sta merodajni za desni kolesni par, napaki $v_{ln}(k-1)$ in $\alpha_{ln}(k-1)$ pa za levi par koles. Predpostavili smo, da je kovarianca med napako, ki je merodajna za desni par koles, ter napako, ki je merodajna za levi par koles, enaka nič. Zato smo pri ocenjevanju kovariance $cov(\varepsilon_{rn}(k-1), \varepsilon_{ln}(k-1))$ (5.12) na nič nastavili tudi kovariance $cov(v_{rn}(k-1), \alpha_{ln}(k-1))$, $cov(\alpha_{rn}(k-1), v_{ln}(k-1))$ ter $cov(\alpha_{rn}(k-1), \alpha_{ln}(k-1))$. Kovariančno matrika $\mathbf{Q}(k-1)$ potem definiramo kot

$$\mathbf{Q}(k-1) = \begin{bmatrix} Q_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} \end{bmatrix}, \quad (5.13)$$

$$Q_{11} = var(\varepsilon_{rn}(k-1)), \quad Q_{22} = var(\varepsilon_{ln}(k-1)), \quad Q_{33} = var(T_n(k-1)),$$

$$Q_{44} = var(x_{Irn}(k-1)), \quad Q_{55} = var(x_{Iln}(k-1)),$$

pri čemer smo kovariance med slučajnimi spremenljivkami $\varepsilon_{rn}(k-1)$, $\varepsilon_{ln}(k-1)$, $T_n(k-1)$, $x_{Irn}(k-1)$ in $x_{Iln}(k-1)$ nastavili na vrednost nič. Šuma $x_{Irn}(k-1)$ ter $x_{Iln}(k-1)$ predstavljata hitrost spreminjanja optimalnih oziroma resničnih vrednosti parametrov $x_{ICRrt}(k)$ in $x_{ICRlt}(k)$ (5.8). Če pričakujemo, da se omejena parametra v 1 sekundi spremenita za red velikosti $0.005m$, lahko varianci $var(x_{Irn}(k-1))$ ter $var(x_{Iln}(k-1))$ nastavimo na vrednost $(0.005m/s)^2$. Definirati je potrebno še elemente matrike $\mathbf{W}_{ij}(k)$.

$$\mathbf{W}_{ij}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}_{a_i}}{\partial \mathbf{n}_j(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1))} \Rightarrow$$

$$\mathbf{W}(k) = \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} & W_{13} & 0 & 0 \\ W_{21} & W_{22} & W_{23} & 0 & 0 \\ W_{31} & W_{32} & W_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T \end{bmatrix}, \quad (5.14)$$

$$W_{11} = -\frac{T\hat{x}_{ICRl}(k-1)}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)),$$

$$W_{12} = \frac{T\hat{x}_{ICRr}(k-1)}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} \cos(\hat{\varphi}_r(k-1)),$$

$$W_{13} = (-\hat{x}_{ICRl}(k-1)\alpha_r v_r(k-1) +$$

$$+\hat{x}_{ICRr}(k-1)\alpha_l v_l(k-1)) \frac{\cos(\hat{\varphi}_r(k-1))}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)},$$

$$W_{21} = \frac{-\hat{x}_{ICRl}(k-1)}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} T \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)),$$

$$W_{22} = \frac{\hat{x}_{ICRr}(k-1)}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} T \sin(\hat{\varphi}_r(k-1)), \quad (5.15)$$

$$W_{23} = (-\hat{x}_{ICRl}(k-1)\alpha_r v_r(k-1) +$$

$$+\hat{x}_{ICRr}(k-1)\alpha_l v_l(k-1)) \frac{\sin(\hat{\varphi}_r(k-1))}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)},$$

$$W_{31} = \frac{T}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)},$$

$$W_{32} = -W_{31},$$

$$W_{33} = \frac{1}{\hat{x}_{ICRr}(k-1) - \hat{x}_{ICRl}(k-1)} (\alpha_r v_r(k-1) - \alpha_l v_l(k-1)).$$

Korekcijski del EKF – a

Lega robota ter kovariančna matrika napake lege sta v korekcijskem delu EKF-a ocenjeni z enačbama (3.6, 3.7), pri čemer se ustrezno spremenijo dimenzije ter

vrednosti matrik $\tilde{\mathbf{P}}(k)$, $\mathbf{H}(k)$, $\mathbf{K}(k)$ ter $\hat{\mathbf{P}}(k)$. Elementi matrike $\mathbf{H}(k)$ so naslednji

$$\mathbf{H}_{ij}(k) = \frac{\partial \mu_i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{p_j}(k)} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_{p_j}(k)} \Rightarrow$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} -c_1 \cos(\alpha_1) & -c_1 \sin(\alpha_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ -c_N \cos(\alpha_N) & -c_N \sin(\alpha_N) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

Funkcija μ_i (5.16, 3.4) parametra premice iz globalnega zemljevida, ki je skladna z i -to ($i = 1, \dots, N$) daljico iz lokalnega zemljevida, pretvori v parametra glede na lokalne koordinate.

Podali smo torej predlog za sprotno ocenjevanje izbranih dveh parametrov asimetričnega kinematičnega modela gibanja robota, ki naj se ocenjujeta s pomočjo EKF-a kot dodatni spremenljivki stanja.

6. Sočasna gradnja zemljevida ter lokalizacija

V tem poglavju bomo na osnovi načrtanega algoritma za lokalizacijo mobilnega robota Pioneer 3-AT nakazali rešitev problema SLAM. Pri SLAM algoritmu mora robot sočasno graditi globalni zemljevid okolja ter sočasno ugotavljati svojo lego v prostoru s pomočjo do tedaj zgrajenega zemljevida. Zato pri SLAM algoritmu stanje vsebuje tako lego robota kot tudi lokacije značilk, ki predstavljajo globalen zemljevid okolja. Ker smo v našem delu za lokalizacijski algoritem uporabili EKF, bo tudi v nakazani rešitvi problema SLAM uporabljen pristop z EKF-om.

V našem delu je v algoritmu za lokalizacijo mobilnega robota zemljevid okolja predstavljen z daljicami. Globalna daljica je opisana z robnima točkama ter parametroma normalne enačbe premice α_i ter p_i (3.1) glede na globalne koordinate. Stanje $\mathbf{x}_s(k)$, ki naj se ocenjuje s pomočjo EKF-a, je potem definirano kot v viru [22]

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_s(k) &= [\mathbf{x}_p(k), p_i(k), \alpha_i(k), \dots, p_{n_G}(k), \alpha_{n_G}(k)]^T, \\ \mathbf{x}_p(k) &= [x_r(k), y_r(k), \varphi_r(k)]^T,\end{aligned}\tag{6.1}$$

kjer vektor $\mathbf{x}_p(k)$ označuje lego robota glede na globalne koordinate (slika 2.1), n_G pa označuje trenutno število daljic v globalnem zemljevidu.

6.1 Predikcijski del SLAM-a

Predikcijski del SLAM-a podobno kot predikcijski del algoritma za lokalizacijo izvršimo s simulacijo kinematičnega modela gibanja robota (2.1). Predikcijski del EKF-SLAM-a lahko glede na referenci [6, 22] zapišemo kot sledi.

Predikcijski del EKF-a

$$\tilde{\mathbf{x}}_s(k) = \mathbf{f}_s(\hat{\mathbf{x}}_s(k-1), \mathbf{u}(k-1)) :$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{x}}_p(k) \\ \tilde{p}_1(k) \\ \tilde{\alpha}_1(k) \\ \vdots \\ \tilde{p}_{n_G}(k) \\ \tilde{\alpha}_{n_G}(k) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}(\hat{\mathbf{x}}_p(k-1), \mathbf{u}(k-1)), \\ \hat{p}_1(k-1), \\ \hat{\alpha}_1(k-1) \\ \vdots \\ \hat{p}_{n_G}(k-1) \\ \hat{\alpha}_{n_G}(k-1) \end{bmatrix}. \quad (6.2)$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_s(k) = \mathbf{A}_s(k) \hat{\mathbf{P}}_s(k-1) \mathbf{A}_s^T(k) + \mathbf{W}_s(k) \mathbf{Q}(k-1) \mathbf{W}_s^T(k),$$

$$\mathbf{A}_{s\ ij}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}_{s\ i}}{\partial \hat{\mathbf{x}}_{s\ j}(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_s(k-1), \mathbf{u}(k-1))}, \quad \mathbf{W}_{s\ ij}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}_{s\ i}}{\partial \mathbf{n}_j(k-1)} \Big|_{(\hat{\mathbf{x}}_s(k-1), \mathbf{u}(k-1))}, \quad (6.3)$$

$\hat{\mathbf{x}}_s(k-1)$ (6.2) je korekcijska ocena stanja iz prejšnjega časovnega trenutka k . $\mathbf{u}(k) = [\omega_R(k), \omega_L(k)]^T$ je vhod v kinematičen model gibanja robota $\mathbf{f}(\cdot)$ (6.2, 2.1), kjer sta $\omega_R(k)$ in $\omega_L(k)$ meritvi tangencialnih hitrosti levega ter desnega para koles. Predikcija $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.2) je lega robota ocenjena s kinematičnim modelom gibanja $\mathbf{f}(\cdot)$. Predikcijske ocene parametrov premic iz globalnega zemljevida $\tilde{p}_i(k)$ ter $\tilde{\alpha}_i(k)$ ($i = 1, \dots, n_G$) glede na korekcijske ocene iz prejšnjega časovnega trenutka $\hat{p}_i(k-1)$ ter $\hat{\alpha}_i(k-1)$ ostanejo nespremenjene. $\tilde{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.3) je ocena kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.2), $\hat{\mathbf{P}}_s(k-1)$ (6.3) pa je ocena kovariančne matrike prejšnje korekcije $\hat{\mathbf{x}}_s(k-1)$ (6.2). $\mathbf{A}_s(k)$ (6.3) je matrika prenosov šumov iz korekcijskih ocen spremenljivk stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k-1)$ (6.2) na predikcijske ocene spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_s(k)$. $\mathbf{Q}(k-1)$ (6.3) je vhodna kovariančna matrika EKF-a oziroma kovariančna matrike vhodnega vektorja šuma $\mathbf{n}(k-1)$ (6.3). Vhodni vektor šuma smo v poglavju 2. definirali kot šum na vhodu v kinematičen model gibanja robota $\mathbf{n}(k)$ (2.3). Vendar pa je vhodna kovariančna matrika $\mathbf{Q}(k-1)$ (2.9) definirana tako, da naj le-ta zajema tudi negotovosti pri ocenjevanju parametrov kinematičnega modela gibanja robota. $\mathbf{W}_s(k)$ (6.3) je matrika prenosov vhodnega šuma $\mathbf{n}(k-1)$ (2.3) na ocene spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.2).

6.2 Korekcijski del SLAM-a

Korekcijski del SLAM-a je podobno kot korekcijski del algoritma za lokalizacijo izveden z minimizacijo razlik med parametri skladnih premic iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja. Lokalne daljice zemljevida lahko določimo iz odbojnih točk LRF-ja na povsem enak način kot je prikazano v poglavju 3.3. Glede na vir [22] v tem odstavku zapišimo korekcijski del EKF-SLAM-a kot sledi. Izhod procesa je tako kot v korekcijskem delu lokalizacijskega algoritma definiran z vektorjem parametrov premic iz lokalnega zemljevida $\mathbf{z}(k) = [r_1, \psi_1, \dots, r_N, \psi_N]^T$ (3.3). V vektorju $\mathbf{z}(k)$ so parametri tistih premic, za katere so bile najdene skladne daljice iz globalnega zemljevida. Model izhoda procesa $\mu(\tilde{\mathbf{x}}_s(k))$ lahko glede na vir [22] oziroma enačbe (3.5,3.4,6.2) zapišemo kot

$$\begin{aligned} \mu(\tilde{\mathbf{x}}_s(k)) &= [\mu_1(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), \tilde{p}_1(k), \tilde{\alpha}_1(k))^T, \dots, \mu_N(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), \tilde{p}_N(k), \tilde{\alpha}_N(k))^T]^T, \\ C_j &= \tilde{p}_j(k) - \tilde{x}_r(k) \cos(\tilde{\alpha}_j(k)) - \tilde{y}_r(k) \sin(\tilde{\alpha}_j(k)), \\ \begin{bmatrix} \hat{r}_i(k) \\ \hat{\psi}_i(k) \end{bmatrix} &= \mu_i(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), \tilde{p}_j(k), \tilde{\alpha}_j(k)) = \\ &= \begin{bmatrix} |C_j| \\ \tilde{\alpha}_j(k) - (\tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + (1 - \text{sign}(C_j)) \cdot \frac{\pi}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.4)$$

$\tilde{p}_j(k)$ in $\tilde{\alpha}_j(k)$ (6.4) sta parametra premice iz globalnega zemljevida, ki je skladna s premico iz lokalnega zemljevida s parametroma r_i in ψ_i (3.3). Parametra premice $\tilde{p}_j(k)$ in $\tilde{\alpha}_j(k)$ sta glede na predikcijo lege robota $\tilde{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.2) oziroma glede na lokalne koordinate pretvorjena v parametra $\hat{r}_i(k)$ in $\hat{\psi}_i(k)$ (6.4).

Korekcijski del EKF-a

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}_s(k) &= \tilde{\mathbf{x}}_s(k) + \mathbf{K}_s(k)(\mathbf{z}(k) - \mu(\tilde{\mathbf{x}}_s(k))), \\ \hat{\mathbf{x}}_s(k) &= [\hat{\mathbf{x}}_p(k)^T, \hat{p}_1(k), \hat{\alpha}_1(k), \dots, \hat{p}_{n_G}(k), \hat{\alpha}_{n_G}(k)]^T, \end{aligned} \quad (6.5)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_s(k) &= \tilde{\mathbf{P}}_s(k) \mathbf{H}_s^T(k) (\mathbf{H}_s(k) * \tilde{\mathbf{P}}_s(k) \mathbf{H}_s^T(k) + \mathbf{R}_s(k))^{-1}, \\ \hat{\mathbf{P}}_s(k) &= \tilde{\mathbf{P}}_s(k) - \mathbf{K}_s(k) \mathbf{H}_s(k) \tilde{\mathbf{P}}_s(k), \quad \mathbf{H}_{s \ ij}(k) = \frac{\partial \mu_i}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{s \ j}(k)} \Big|_{\tilde{\mathbf{x}}_{s \ j}(k)} \end{aligned} \quad (6.6)$$

$\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) je korekcijska ocena stanja, $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6) pa označuje ocenjeno kovariančno matriko napake korekcije. $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.5) označuje korekcijsko oceno lege

robotu, $\hat{p}_j(k)$ in $\hat{\alpha}_j(k)$ ($j = 1, \dots, n_G$) pa označujejo korekcijske ocene parametrov premic iz globalnega zemljevida okolja. $\mathbf{R}_s(k)$ (6.6) je kovariančna matrika izhodnega vektorja parametrov premic iz lokalnega zemljevida $\mathbf{z}(k)$. Ker je izhodni vektor $\mathbf{z}(k)$ (6.6) v SLAM algoritmu enak kot v korekcijskem delu lokalizacijskega algoritma (3.3, 3.6), je tudi kovariančna matrika $\mathbf{R}_s(k)$ (6.6) enaka tisti iz lokalizacijskega algoritma $\mathbf{R}(k)$ (3.7, 3.9). Če za ocenjevanje parametrov normalne enačbe premice uporabimo metodo navadnih LSQ, lahko izhodno kovarainčno matriko $\mathbf{R}_s(k)$ nastavimo s pomočjo predlagane metode za ocenjevanje kovarianc parametrov normalne enačbe premice (3.33). Matrika $\mathbf{H}(k)$ (6.6) je matrika prenosov negotovosti iz predikcijskih ocen spremenljivk stanja $\tilde{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.6, 6.2) na parametre premic iz globalnega zemljevida, ki so pretvorjeni glede na koordinate robota v parametre $[\hat{r}_i(k), \hat{\psi}_i(k)]^T$, $i = 1, \dots, N$ (6.4).

Po izvršenem korekcijskem delu EKF-a v aktualnem trenutku k se glede na korekcijo v prejšnjem časovnem trenutku $k - 1$ spremenijo korekcijske ocene parametrov vseh premic iz globalnega zemljevida $\hat{p}_j(k)$ in $\hat{\alpha}_j(k)$ ($j = 1, \dots, n_G$), ki sestavljajo ocenjen vektor stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5). Zato je potrebno na novo izračunati robne točke vseh daljic iz globalnega zemljevida, ki so bile nazadnje obnovljene v prejšnjem časovnem trenutku $k - 1$. Obravnavajmo daljice iz globalnega zemljevida, za katere v aktualnem časovnem trenutku k niso bile najdene skladne daljice iz lokalnega zemljevida. Robne točke teh daljic v tekočem trenutku k projiciramo na pripadajoče premice, ki so definirane z aktualnimi ocenami parametrov $\hat{p}_j(k)$ in $\hat{\alpha}_j(k)$ (6.5), z naslednjo relacijo.

$$\begin{aligned} x_P &= x_B + (\hat{p}_j(k) - x_B \cos \hat{\alpha}_j(k) - y_B \sin \hat{\alpha}_j(k)) \cos \hat{\alpha}_j(k), \\ y_P &= y_B + (\hat{p}_j(k) - x_B \cos \hat{\alpha}_j(k) - y_B \sin \hat{\alpha}_j(k)) \sin \hat{\alpha}_j(k). \end{aligned} \quad (6.7)$$

x_B in y_B (6.8) sta koordinati robne točke globalne daljice iz prejšnjega časovnega trenutka $k - 1$, x_P in y_P pa sta koordinati točke, ki sta dobljeni s pravokotno projekcijo točke (x_B, y_B) na globalno premico v trenutku k . Sedaj pa obravnavajmo še daljice iz globalnega zemljevida, za katere so bile v aktualnem trenutku k najdene skladne daljice iz lokalnega zemljevida. Daljica iz lokalnega zemljevida s svojima robnima točkama lahko vsebuje novo informacijo, ki ni zajeta v skladni daljici iz globalnega zemljevida. Zato robni točki lokalne daljice najprej

z naslednjo relacijo pretvorimo glede na globalne koordinate.

$$\begin{aligned} x_V &= \hat{x}_r(k) + x_U \cos(\hat{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) - y_U \sin(\hat{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}), \\ y_V &= \hat{y}_r(k) + x_U \sin(\hat{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + y_U \cos(\hat{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}). \end{aligned} \quad (6.8)$$

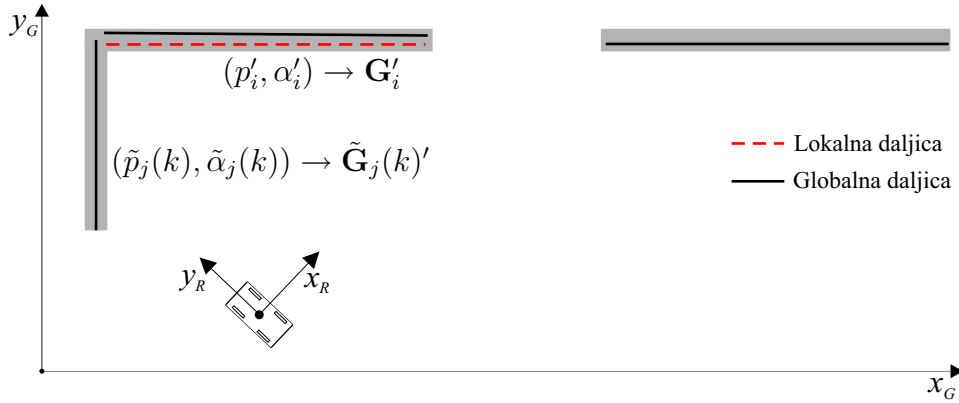
x_U in y_U (6.8) sta koordinati robne točke daljice iz lokalnega zemljevida, x_V in y_V pa sta pretvorjeni koordinati robne točke daljice. $\hat{\mathbf{x}}_p(k) = (\hat{x}_r(k), \hat{y}_r(k), \hat{\varphi}_r(k))$ (6.8) je korekcijska ocena lege robota (6.5). Izmed vseh štirih točk, ki definirajo pretvorjeno lokalno daljico ter skladno globalno daljico, izberemo tisti dve, ki sta med seboj najbolj oddaljeni. Ti dve točki nato z relacijo (6.7) projiciramo na pripadajočo premico iz globalnega zemljevida, ki je definirana s korekcijskima ocenama parametrov $\hat{p}_j(k)$ in $\hat{\alpha}_j(k)$ (6.5). Lahko pa se tudi zgodi, da za neko daljico iz lokalnega zemljevida ni bila najdena nobena skladna daljica iz globalnega zemljevida. Takrat to lokalno daljico smatramo kot novo informacijo, ki jo je potrebno vključiti v globalni zemljevid okolja. Parametra lokalne premice r_i in ψ_i (3.2) z relacijo (6.10) pretvorimo glede na globalne koordinate oziroma glede na korekcijsko oceno lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.5) v parametra p'_i in α'_i . Pretvorjena parametra lokalne daljice p'_i in α'_i vključimo v globalen zemljevid okolja tako [22], da vektor $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5), ki predstavlja zadnjo korekcijsko oceno stanja, razširimo kot sledi

$$[\hat{\mathbf{x}}_s(k)^T, \hat{p}_{g+1}(k), \hat{\alpha}_{g+1}(k)]^T = [\hat{\mathbf{x}}_s(k)^T, p'_i, \alpha'_i]^T. \quad (6.9)$$

Korekcijska ocena vektorja stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)^T$ je torej razširjena z dvema novima spremenljivkama stanja. Zato je potrebno z dvema dodatnima vrsticama ter dvema dodatnima stolpcema razširiti tudi pripadajočo kovariančno matriko korekcije $\tilde{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6), kot je to prikazano v delu [22].

6.2.1 Iskanje parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida

Za izvršitev korekcijskega dela EKF-a je potrebno določiti pare daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja, ki pripadajo istim segmentom v okolju (slika 6.1). V poglavju 3.1 smo opisali dva načina iskanja parov skladnih daljic. Tukaj pa prikažimo še strategijo z uporabo Mahalanobisove razdalje [59, 43, 35, 10], ki



Slika 6.1: Daljice iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja.

se pogosto uporablja za določanje parov skladnih značilk iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja. Poleg parametrov premic se pri Mahalanobisovi razdalji upošteva tudi negotovost teh parametrov.

Definirajmo najprej veličine, ki so potrebne za izračun Mahalanobisove razdalje. Med seboj primerjamo i -to daljico iz lokalnega zemljevida s parametroma r_i ter ψ_i (3.3) in j -to daljico iz globalnega zemljevida s parametroma $\tilde{p}_j(k)$ ter $\tilde{\alpha}_j(k)$ (6.2). Parametra premice iz lokalnega zemljevida r_i in ψ_i glede na predikcijo lege robota $\tilde{x}_p(k)$ (6.2) pretvorimo v parametra p'_i ter α'_i (6.10), ki sta definirana glede na globalne koordinate (slika 6.1).

$$\begin{bmatrix} p'_i \\ \alpha'_i \end{bmatrix} = \nu_i(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), r_i, \psi_i) = \begin{bmatrix} \text{sign}(D_i)r_i + \tilde{x}_r \cos(\alpha'_i) + \tilde{y}_r \sin(\alpha'_i) \\ \psi_i + \tilde{\varphi}_r - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}(\text{sign}(D_i) - 1) \end{bmatrix}, \quad (6.10)$$

$$D_i = r_i + \tilde{x}_r(k) \cos(\psi_i + \tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}) + \tilde{y}_r(k) \sin(\psi_i + \tilde{\varphi}_r(k) - \frac{\pi}{2}).$$

Glede na vir [22] lahko kovariančno matriko vektorja pretvorjenih parametrov $[p'_i, \alpha'_i]^T$ (6.10) izračunamo kot sledi

$$\mathbf{G}'_i = \begin{bmatrix} \text{var}(p'_i) & \text{cov}(p'_i, \alpha'_i) \\ \text{cov}(\alpha'_i, p'_i) & \text{var}(\alpha'_i) \end{bmatrix} = A_{\tilde{\mathbf{x}}_s} \tilde{\mathbf{P}}(k) A_{\tilde{\mathbf{x}}_s}^T + A_{\mathbf{z}_i} \mathbf{R}_i A_{\mathbf{z}_i}^T, \quad (6.11)$$

$$A_{\tilde{\mathbf{x}}_s}(k, l) = \frac{\partial \nu_{i,k}(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), r_i, \psi_i)}{\partial \tilde{\mathbf{x}}_{s,l}}, \quad A_{\mathbf{z}_i}(k, l) = \frac{\partial \nu_{i,k}(\tilde{\mathbf{x}}_p(k), r_i, \psi_i)}{\partial \mathbf{z}_{i,l}}, \quad \mathbf{z}_i = \begin{bmatrix} r_i \\ \psi_i \end{bmatrix},$$

kjer je \mathbf{R}_i (3.9, 3.10) kovariančna matrika vektorja parametrov premice iz lokalnega zemljevida $[r_i, \psi_i]^T$ (3.3). Kovariančna matrika vektorja parametrov premice

iz globalnega zemljevida $[\tilde{p}_j, \tilde{p}_j]^T$ (slika 6.1) je podmatrika ocenjene kovariančne matrike predikcije $\tilde{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.3)

$$\mathbf{G}_j(k) = \begin{bmatrix} \text{var}(\tilde{p}_j(k)) & \text{cov}(\tilde{p}_j(k), \tilde{\alpha}_j(k)) \\ \text{cov}(\tilde{\alpha}_j(k), \tilde{p}_j(k)) & \text{var}(\tilde{\alpha}_j(k)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{P}}_{s(2j+2, 2j+2)}(k) & \tilde{\mathbf{P}}_{s(2j+2, 2j+3)}(k) \\ \tilde{\mathbf{P}}_{s(2j+3, 2j+2)}(k) & \tilde{\mathbf{P}}_{s(2j+3, 2j+3)}(k) \end{bmatrix}. \quad (6.12)$$

Mahalanobisova razdalja se glasi

$$d_{ij} = [p'_i - \tilde{p}_j(k), \alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)](\mathbf{G}'_i + \tilde{\mathbf{G}}_j(k))^{-1}[p'_i - \tilde{p}_j(k), \alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)]^T. \quad (6.13)$$

V kolikor so slučajne spremenljivke p'_i , α'_i , $\tilde{p}_j(k)$ in $\tilde{\alpha}_j(k)$ porazdeljena normalno, ima Mahalanobisova razdalja d_{ij} (6.13) χ^2 porazdelitev. Ob predpostavki normalne porazdelitve omenjenih slučajnih spremenljivk lahko torej izvedemo χ^2 test, ki pravi naslednje. i -ta premica iz lokalnega zemljevida ter j -ta premica iz globalnega zemljevida sta skladni, če je Mahalanobisova razdalja manjša od vrednosti praga

$$d_{ij} < \chi_P^2(2). \quad (6.14)$$

Vrednost konstante $\chi_P^2(2)$ odčitamo iz tabele za χ^2 porazdelitev. Število 2 v oklepaju označuje število prostostnih stopenj oziroma dimenzijo vektorja $[p'_i - \tilde{p}_j(k), \alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)]$, ki nastopa v Mahalanobisovi razdalji d_{ij} (6.13). Pomen vrednosti P je sledeč. Naj bosta premica iz lokalnega zemljevida s pretvorjenima parametroma p'_i ter α'_i in premica iz globalnega zemljevida s parametroma $\tilde{p}_j(k)$ ter $\tilde{\alpha}_j(k)$ skladni. Odločitev, da ti dve premici nista skladni, je torej napačna odločitev. Verjetnost, da pri vrednosti praga $\chi_P^2(2)$ (6.14) sprejmemo napačno odločitev, je enaka P . Za verjetnost P se najpogosteje izbere vrednost 0.05 ali 0.01, pripadajoči vrednosti pragov pa sta $\chi_{0.05}^2(2) = 5.99$ in $\chi_{0.01}^2(2) = 9.21$.

Osvetlino Mahalanobisovo razdaljo. Vsota matrik $\mathbf{G}'_i + \tilde{\mathbf{G}}_j(k)$ (6.13) je kovariančna matrika vektorja razlik parametrov premic iz lokalnega ter globalnega zemljevida $[p'_i - \tilde{p}_j(k), \alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)]^T$. Vektor razlik parametrov $[p'_i - \tilde{p}_j(k), \alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)]$ je normiran s kovariančno matriko oziroma negotovostjo tega vektorja in nato pomnožen s transponiranim vektorjem razlik. Večja kot je torej negotovost pretvorjenih parametrov premice iz lokalnega zemljevida p'_i in α'_i ter parametrov premice

iz globalnega zemljevida $\tilde{p}_j(k)$ ter $\tilde{\alpha}_j(k)$, večji sta lahko razliki med parametroma $p'_i - \tilde{p}_j(k)$ ter $\alpha'_i - \tilde{\alpha}_j(k)$ in premici bosta še vedno zadostili pogoju za skladnost (6.14). Ali povedano drugače, premici sta izbrani za skladni, če sta razliki med parametroma obeh premic dovolj blizu negotovosti obeh premic.

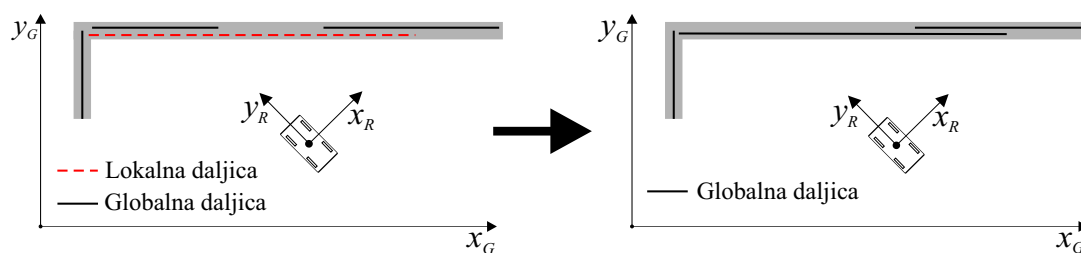
Poglejmo si primer na sliki 6.1. Lokalna premica se tam zelo dobro ujema z globalno premico, ki je narisana skrajno desno zgoraj. Kljub temu pa pripadajoča lokalna ter pripadajoča globalna daljica ne pripadata istemu segmentu v okolju. Če je torej Mahalanobisova razdalja med lokalno ter globalno premico manjša od praga, to še ne pomeni, da sta pripadajoči daljici skladni. Pri primerjavi neke lokalne daljice z vsemi globalnimi daljicami je zato v delu [41] najprej uporabljen binarni kriterij, ki smo ga opisali v poglavju 3.1. Izmed vseh parov daljic, ki izpolnjujejo binaren kriterij, je nato za skladen par izbran tisti, pri katerem sta si daljici najbolj podobni v smislu verjetnosti [41].

V našem delu opišimo strategijo za iskanje parov skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja z uporabo binarnega kriterija ter Mahalanobisove razdalje. Vsako daljico iz lokalnega zemljevida pretvorimo glede na globalne koordinate oziroma glede na predikcijo lege robota in jo primerjamo z vsako daljico iz globalnega zemljevida G_j ($j = 1, \dots, n_G$). Pretvorjeno lokalno daljico označimo z L . Pri tem robni točki vsake lokalne daljice pretvorimo z relacijo 6.8, kjer namesto korekcijske ocene lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k) = (\hat{x}_r(k), \hat{y}_r(k), \hat{\varphi}_r(k))$ (6.5) uporabimo predikcijsko oceno lege $\tilde{\mathbf{x}}_p(k) = (\tilde{x}_r(k), \tilde{y}_r(k), \tilde{\varphi}_r(k))$ (6.2), ki je najboljša ocena do tega trenutka. Parametra vsake premice iz lokalnega zemljevida in njuno kovariančno matriko pa pretvorimo glede na globalne koordinate, kot je prikazano v enačbah (6.10, 6.11). Nato uporabimo binaren kriterij [41] za iskanje skladnih daljic. Ta kriterij pravi, da sta daljici skladni, če sta vsaj dve izmed stopenj prileganja $O_j(a_j, b_j)$, $O_j(c_j, d_j)$, $O_j(a_j, c_j)$ in $O_j(b_j, d_j)$ (3.13) manjši od vrednosti praga. Pri tem poudarimo, da se vrednosti a_j , b_j , c_j ter d_j v stopnjah prileganja $O_j(., .)$ tukaj nanašajo na razdalje med robnimi točkami pretvorjene lokalne daljice L ter globalne daljice G_j (slika 3.5). Neko pretvorjeno lokalno daljico L s pomočjo stopenj prileganja primerjamo z vsemi globalnimi daljicami G_j ($j = 1, \dots, n_G$). Izmed vseh n_G parov daljic izberemo tiste pare, ki izpolnjujejo binaren kriterij. Izmed parov daljic, ki izpolnjujejo binaren kriterij, pa poiščemo par daljic z najmanjšo Mahalanobisovo razdaljo d_{ij} (6.13). Najdena daljica iz

globalnega zemljevida je torej glede na opisan kriterij najbolj podobna pretvorjeni lokalni daljici. Če je Mahalanobisova razdalja med tema dvema daljicama manjša od vrednosti praga $\chi_P^2(2)$ (6.14), daljici izberemo za skladni.

V opisani strategiji za iskanje skladnih daljic je potrebno robne točke vseh daljic iz lokalnega zemljevida pretvoriti glede na globalne koordinate z relacijo (6.8). Po daljšem času izvrševanja algoritma SLAM je v globalnem zemljevidu veliko več daljic kot v lokalnem zemljevidu okolja. Opisana strategija je torej računsko bolj učinkovita v primerjavi s strategijo, kjer se vsaka daljica iz lokalnega zemljevida primerja z vsako daljico iz globalnega zemljevida, ki je pretvorjena glede na lokalne koordinate. V tem primeru je namreč potrebno robne točke vseh globalnih daljic, ki jih je veliko več kot lokalnih daljic, pretvoriti glede na lokalne koordinate z relacijo (3.11).

6.2.2 Združevanje skladnih daljic iz globalnega zemljevida



Slika 6.2: Točki lokalne daljice projiciramo na skladno globalno premico, zato se nova globalna daljica delno prekriva z drugo globalno daljico.

Po izvršenem korekcijskem delu EKF-a se lahko zgodi, da se nekatere daljice iz globalnega zemljevida med seboj prekrivajo [22]. Opazujmo primer na sliki 6.2, kjer smo točki lokalne daljice projicirali na skladno globalno premico. Nova globalna daljica se zato delno prekriva z vzporedno globalno daljico, ki se nahaja desno zgoraj (slika 6.2). Ker sta daljici vzporedni in se med seboj prekrivata, sklepamo da pripadata istemu segmentu v okolju in ju zato lahko združimo. V prejšnjem poglavju smo prikazali strategijo za iskanje skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida, kjer smo vsako lokalno daljico primerjali z vsako globalno daljico. Pri tem smo za določanje stopenj prileganja daljic uporabili binaren kriterij, za definicijo podobnosti premic pa Mahalanobisovo razdaljo. Po

istem kopitu lahko poiščemo tudi pare skladnih daljic iz globalnega zemljevida, pri čemer vsako globalno daljico primerjamo z vsako globalno daljico. Denimo, da na ta način globalni daljici oziroma premici z indeksoma i in j izberemo za skladni in ju želimo združiti v eno daljico. Vektorja parametrov obeh skladnih globalnih premic ter njuni kovariančni matriki označimo kot sledi

$$\mathbf{g}_i(k) = \begin{bmatrix} \hat{p}_i(k) \\ \hat{\alpha}_i(k) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}_j(k) = \begin{bmatrix} \hat{p}_j(k) \\ \hat{\alpha}_j(k) \end{bmatrix}, \quad (6.15)$$

$$\mathbf{G}_i(k) = \text{cov}(\mathbf{g}_i(k)), \quad \mathbf{G}_j(k) = \text{cov}(\mathbf{g}_j(k)).$$

Vektorja $\mathbf{g}_i(k)$ in $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) sta pod-vektorja korekcijske ocene stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5). Kovariančni matriki obeh vektorjev $\mathbf{G}_i(k)$ ter $\mathbf{G}_j(k)$ pa sta, kot je prikazano v enačbi (6.12), podmatriki kovariančne matrike korekcijske ocena stanja $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6). Skladni premici z vektorjema parametrov $\mathbf{g}_i(k)$ in $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) torej želimo združiti v novo premico. Glede na vira [64, 46] lahko vektor parametrov nove premice $\mathbf{g}_m(k)$ ocenimo z uteženim povprečjem vektorjev $\mathbf{g}_i(k)$ in $\mathbf{g}_j(k)$ kot sledi

$$\mathbf{g}_m(k) = \begin{bmatrix} \hat{p}_m(k) \\ \hat{\alpha}_m(k) \end{bmatrix} = \mathbf{G}_1(k)(\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{g}_i(k) + \mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{g}_j(k)), \quad (6.16)$$

$$\mathbf{G}_1(k) = (\mathbf{G}_i(k)^{-1} + \mathbf{G}_j(k)^{-1})^{-1}.$$

Vektor $\mathbf{g}_i(k)$ ($\mathbf{g}_j(k)$) je normiran z negotovostjo tega vektorja tako (6.16), da je pomnožen z inverzom kovariančne matrike $\mathbf{G}_i(k)$ ($\mathbf{G}_j(k)$). Manjša kot je torej negotovost vektorja $\mathbf{g}_i(k)$ ($\mathbf{g}_j(k)$), večja je utežnostna matrika $\mathbf{G}_i(k)^{-1}$ ($\mathbf{G}_j(k)^{-1}$) in obratno. Utežena vsota vektorjev $\mathbf{g}_i(k)$ ter $\mathbf{g}_j(k)$ pa je nato pomnožena še z matriko $\mathbf{G}_1(k)$, tako da je vsota novih utežnostnih matrik $\mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)$ in $\mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)$ enaka identiteti. Vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) v korekcijski oceni stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) zamenjamo z ocenjenim vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.16). Določiti je potrebno še robne točke nove daljice. Izmed vseh štirih robnih točk daljic, ki ju združujemo, izberemo točki, ki sta med seboj najbolj oddaljeni. Izbrani točki nato z relacijo (6.7) projiciramo na novo premico, ki je definirana s parametroma $\hat{p}_m(k)$ in $\hat{\alpha}_m(k)$ (6.16).

Ker smo v korekcijski oceni vektorja stanja (6.5) spremenili vrednosti dveh spremenljivk stanja, se je spremenila tudi kovariančna matrika korekcije ocena stanja $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6). V našem delu bomo zato pokazali kako v tem primeru izračunati

nove vrednosti kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$. Določiti je potrebno naslednje kovariančne matrike:

- Kovariančna matrika vektorja parametrov nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.5,6.15,6.16).
- Kovariančne matrike med novim vektorjem $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ ter vektorji parametrov vseh preostalih premic iz globalnega zemljevida $\mathbf{g}_h(k) = [\hat{\mathbf{p}}_h(k), \hat{\alpha}_h(k)]^T$ ($h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G$) (6.5). Kovariančne matrike med novim vektorjem $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ ter vektorjem parametrov stare premice $\mathbf{g}_h(k) = \mathbf{g}_i(k)$ (6.5,6.15,6.16) ne izračunamo, saj bo v nadaljevanju vektor $\mathbf{g}_i(k)$ odstranjen iz korekcijske ocene stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5).
- Kovariančna matrika med novim vektorjem $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ ter korekcijsko oceno lege robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.5).

Osredotočimo se najprej na izračun kovariančne matrike vektorja parametrov nove premice $\mathbf{g}_m(k)$ (6.16). Zato prikažimo nekatere splošne lastnosti matrik in kovariančnih matrik. Naj bosta $\mathbf{X} = [x_1, \dots, x_n]^T$ in $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ (6.17) vektorja naključnih spremenljivk, \mathbf{A} in \mathbf{B} pa splošni matriki ustreznih dimenzij. Z ozirom na naključna vektorja \mathbf{X} in \mathbf{Y} lahko zapišemo naslednje lastnosti kovariančnih matrik.

$$\begin{aligned}
cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X})^T, \\
cov(\mathbf{A}\mathbf{X}) &= \mathbf{A}cov(\mathbf{X})\mathbf{A}^T, \\
cov(\mathbf{X} + \mathbf{Y}) &= cov(\mathbf{X}) + cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + cov(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) + cov(\mathbf{Y}) \Rightarrow \\
cov(\mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}\mathbf{Y}) &= \mathbf{A}cov(\mathbf{X})\mathbf{A}^T + \mathbf{A}cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{B}^T + \\
&\quad + \mathbf{B}cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T\mathbf{A}^T + \mathbf{B}cov(\mathbf{Y})\mathbf{B}^T.
\end{aligned} \tag{6.17}$$

Zadnjo lastnost (6.17) smo izpeljali iz prvih treh lastnosti. Zapišimo lastnosti *Ls1* in *Ls2* splošnih kvadratnih matrik \mathbf{A} in \mathbf{B} ter lastnost *Ls3* matrike $\mathbf{G}_i(k)$ oziroma $\mathbf{G}_j(k)$

$$\begin{aligned}
Ls1 : (\mathbf{A}^{-1})^T &= (\mathbf{A}^T)^{-1}, \quad Ls2 : (\mathbf{A} + \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T + \mathbf{B}^T, \\
Ls3 : \mathbf{G}_j(k)^T &= \mathbf{G}_j(k).
\end{aligned} \tag{6.18}$$

Operator $(.)^T$ (6.18) predstavlja transpozicijo matrike. Kovariančna matrika $\mathbf{G}_j(k)$ (6.18) je simetrična (lastnost *Ls3*), ker sta njuni kovarianci

$cov(\tilde{p}_j(k), \tilde{\alpha}_j(k))$ in $cov(\tilde{\alpha}_j(k), \tilde{p}_j(k))$ (6.12) enaki. Iz lastnosti *Ls1*, *Ls2* in *Ls3* (6.18) lahko za kovariančni matriki $\mathbf{G}_i(k)$ oziroma $\mathbf{G}_j(k)$ (6.15) ter matriko $\mathbf{G}_1(k)$ (6.16) izpeljemo naslednje enakosti

$$\begin{aligned} Ls1 \text{ in } Ls3 &\Rightarrow (\mathbf{G}_j(k)^T)^{-1} = \mathbf{G}_j(k)^{-1}, \\ Ls1 \text{ in } Ls2 \text{ in } Ls3 &\Rightarrow \mathbf{G}_1(k)^T = \mathbf{G}_1(k). \end{aligned} \quad (6.19)$$

Zapišimo še kovariančno matriko med vektorjema prametrov starih premic $\mathbf{g}_i(k)$ in $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15), ki je podmatrika kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6).

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_{ij}(k) &= cov(\mathbf{g}_i(k), \mathbf{g}_j(k)), \quad \mathbf{G}_{ji}(k) = cov(\mathbf{g}_j(k), \mathbf{g}_i(k)) = \mathbf{G}_{ij}(k)^T, \\ cov(\mathbf{g}_i(k), \mathbf{g}_j(k)) &= \begin{bmatrix} cov(\hat{p}_i(k), \hat{p}_j(k)) & cov(\hat{p}_i(k), \hat{\alpha}_j(k)) \\ cov(\hat{\alpha}_i(k), \hat{p}_j(k)) & cov(\hat{\alpha}_i(k), \hat{\alpha}_j(k)) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+2, 2j+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+2, 2j+3)}(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+3, 2j+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+3, 2j+3)}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Enakost $\mathbf{G}_{ji}(k) = \mathbf{G}_{ij}(k)^T$ (6.20) sledi iz prve lastnosti v (6.17). Iz enakosti v enačbah (6.17, 6.19) lahko izpeljemo kovariančno matriko vektorja $\mathbf{g}_m(k)$ (6.16) kot sledi

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{g}_m(k)) &= cov(\mathbf{G}_1(k)(\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{g}_i(k) + \mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{g}_j(k))) = \\ &= \mathbf{G}_1(k) + \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{G}_{ij}(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{G}_1(k) + \\ &= \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{G}_{ij}(k)^T\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{G}_1(k). \end{aligned} \quad (6.21)$$

V korekcijskem vektorju $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) smo vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) zamenjali z vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.16). Zato kovariančno matriko stare premice $\mathbf{G}_j(k)$ (6.15,6.12), ki je podmatrika kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6), zamenjamo s kovariančno matriko nove premice $\mathbf{G}_j(k) = cov(\mathbf{g}_m(k))$ (6.21).

Sedaj pa se osredotočimo na izračun kovariančnih matrik med vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.5,6.15,6.16) ter vektorji parametrov vseh preostalih premic iz globalnega zemljevida (6.5)

$$\mathbf{g}_h(k) = \begin{bmatrix} \hat{p}_h(k) \\ \hat{\alpha}_h(k) \end{bmatrix}, \quad h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G. \quad (6.22)$$

Zato najprej zapišimo nekatere splošne lastnosti kovariančnih matrik. Naj bojo $\mathbf{X}_1 = [x_{11}, \dots, y_{1m}]^T$, $\mathbf{X}_2 = [x_{21}, \dots, y_{2m}]^T$ in $\mathbf{Y} = [y_1, \dots, y_n]^T$ vektorji naključnih

spremenljivk, \mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 in \mathbf{B} pa splošne matrice ustreznih dimenzij. Potem lahko z ozirom na naključne vektorje \mathbf{X}_1 , \mathbf{X}_2 in \mathbf{Y} napišemo naslednje lastnosti kovariančnih matrik.

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{B}\mathbf{Y}) &= \mathbf{A}cov(\mathbf{X}, \mathbf{Y})\mathbf{B}^T, \\ cov(\mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) &= cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + cov(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) \Rightarrow \\ cov(\mathbf{A}_1\mathbf{X}_1 + \mathbf{A}_2\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}) &= \mathbf{A}_1cov(\mathbf{X}_1, \mathbf{Y}) + \mathbf{A}_2cov(\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}). \end{aligned} \quad (6.23)$$

Tretjo lastnost (6.23) smo izpeljali iz prvih dveh lastnosti. Zapišimo še kovariančne matrice med vektorjem parametrov stare premice $\mathbf{g}_i(k)$ oziroma $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) ter vektorji parametrov vseh preostalih premic iz globalnega zemljevida $\mathbf{g}_h(k)$ ($h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G$) (6.5). Omenjene kovariančne matrice so podmatrice kovariančne matrice korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6) kot sledi.

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{g}_i(k), \mathbf{g}_h(k)) &= \begin{bmatrix} cov(\hat{p}_i(k), \hat{p}_h(k)) & cov(\hat{p}_i(k), \hat{\alpha}_h(k)) \\ cov(\hat{\alpha}_i(k), \hat{p}_h(k)) & cov(\hat{\alpha}_i(k), \hat{\alpha}_h(k)) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+2, 2h+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+2, 2h+3)}(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+3, 2h+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2i+3, 2h+3)}(k) \end{bmatrix}, \\ cov(\mathbf{g}_j(k), \mathbf{g}_h(k)) &= \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_{s(2j+2, 2h+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2j+2, 2h+3)}(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_{s(2j+3, 2h+2)}(k) & \hat{\mathbf{P}}_{s(2j+3, 2h+3)}(k) \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6.24)$$

$$h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G.$$

Iz zadnje enakosti v enačbi (6.23) izpeljemo kovariančne matrice med vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_m(k)$ (6.15) ter vektorji parametrov vseh preostalih premic iz globalnega zemljevida $\mathbf{g}_h(k)$ (6.5) kot sledi

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{g}_m(k), \mathbf{g}_h(k)) &= \\ cov(\mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{g}_i(k) + \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{g}_j(k), \mathbf{g}_h(k)) &= \\ \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)^{-1}cov(\mathbf{g}_i(k), \mathbf{g}_h(k)) + \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}cov(\mathbf{g}_j(k), \mathbf{g}_h(k)), & \quad (6.25) \end{aligned}$$

$$cov(\mathbf{g}_h(k), \mathbf{g}_m(k)) = cov(\mathbf{g}_m(k), \mathbf{g}_h(k))^T,$$

$$h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G.$$

Vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) smo v korekcijski oceni stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) zamenjali z vektorjem nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.16). Zato izračunane kovariančne matrice $cov(\mathbf{g}_m(k), \mathbf{g}_h(k))$ in $cov(\mathbf{g}_h(k), \mathbf{g}_m(k))$ (6.25) shranimo v

podmatrike kovariančne matriki korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6), ki se nanašajo na j -to daljico iz globalnega zemljevida ter na daljice z indeksi h , kot sledi.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 2h+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 2h+3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 2h+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 2h+3)(k) \end{bmatrix} &= cov(\mathbf{g}_m(k), \mathbf{g}_h(k)), \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_s(2h+2, 2j+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2h+2, 2j+3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(2h+3, 2j+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2h+3, 2j+3)(k) \end{bmatrix} &= cov(\mathbf{g}_h(k), \mathbf{g}_m(k)), \end{aligned} \quad (6.26)$$

$$h = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, j-1, j+1, \dots, n_G.$$

Prikažimo še izračun kovariančne matrike med vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_m(k)$ (6.16) ter vektorjem $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.5), ki predstavlja korekcijsko oceno lege robota. Zapišimo najprej kovariančno matriko med vektorjem parametrov stare premice $\mathbf{g}_i(k)$ oziroma $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) ter lego robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$

$$cov(\mathbf{g}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)) = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 1)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 1)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 3)(k) \end{bmatrix}. \quad (6.27)$$

Iz zadnje enakosti v enačbi (6.23) izpeljemo kovariančno matriko med vektorjem $\mathbf{g}_m(k)$ ter vektorjem $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ kot sledi

$$\begin{aligned} cov(\mathbf{g}_m(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)) &= \\ cov(\mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)^{-1}\mathbf{g}_i(k) + \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}\mathbf{g}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)) &= \\ \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_i(k)^{-1}cov(\mathbf{g}_i(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)) + \mathbf{G}_1(k)\mathbf{G}_j(k)^{-1}cov(\mathbf{g}_j(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)), & \quad (6.28) \\ cov(\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{g}_m(k)) &= cov(\mathbf{g}_m(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k))^T. \end{aligned}$$

V korekcijskem vektorju $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) smo vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_j(k)$ (6.15) zamenjali z vektorjem parametrov nove premice $\mathbf{g}_j(k) = \mathbf{g}_m(k)$ (6.16). Zato izračunani kovariančni matriki $cov(\mathbf{g}_m(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k))$ in $cov(\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{g}_m(k))$ (6.28) shranimo v podmatriki kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6), ki se nanašata na j -to daljico iz globalnega zemljevida ter lego robota $\hat{\mathbf{x}}_p(k)$ (6.5), kot sledi.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 1)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+2, 3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 1)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2j+3, 3)(k) \end{bmatrix} &= cov(\mathbf{g}_m(k), \hat{\mathbf{x}}_p(k)), \\ \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{P}}_s(1, 2j+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(1, 2j+3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(2, 2j+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(2, 2j+3)(k) \\ \hat{\mathbf{P}}_s(3, 2j+2)(k) & \hat{\mathbf{P}}_s(3, 2j+3)(k) \end{bmatrix} &= cov(\hat{\mathbf{x}}_p(k), \mathbf{g}_m(k)). \end{aligned} \quad (6.29)$$

Vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_i(k)$ (6.15) odstranimo iz korekcijske ocene stanja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$ (6.5) oziroma iz globalnega zemljevida. Novo število daljic v globalnem zemljevidu je tako $n_{Gnov} = n_G - 1$ (6.5). V kovariančni matriki korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ (6.6) se vrstici z indeksoma $2i + 2$ in $2i + 3$ ter stolpca z indeksoma $2i + 2$ in $2i + 3$ nanašajo na vektor parametrov stare premice $\mathbf{g}_i(k)$, ki smo jo odstranili korekcijskega vektorja $\hat{\mathbf{x}}_s(k)$. Omenjeni vrstici in stolpca zato odstranimo iz kovariančne matrike korekcije $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$. Nova dimenzija matrike $\hat{\mathbf{P}}_s(k)$ je tako $n_{Gnov} \times n_{Gnov}$.

V tem poglavju smo torej podali izpeljavo za določitev novih vrednosti kovariančne matrike korekcije za primer, ko v EKF-SLAM algoritmu dve skladni premici iz globalnega zemljevida združimo v eno premico.

7. Sklep

V doktorski nalogi smo se osredotočili na reševanje problema lokalizacije štirikolesnega mobilnega robota, ki je opremljen z enkoderji za meritev kotnih hitrosti koles ter laserskim merilnikom razdalj. V ta namen smo uporabili razširjen Kalmanov filter. Algoritem za lokalizacijo mobilnega robota mora potekati v realnem času. Zato je pri reševanju problema lokalizacije razvoj algoritmov, ki so računsko čim manj zahtevni, velikega pomena.

Predikcijski del EKF-a je izveden s simulacijo kinematičnega modela gibanja robota. Podali smo napotek za eksperimentalno oceno parametra vhodne kovariančne matrike EKF-a. Vhodna kovariančna matrika zajema negotovost zaradi napak pri modeliranju gibanja robota oziroma negotovost zaradi netočno ocenjenih parametrov kinematičnega modela. Stremeli smo k iskanju konzervativne ocene vhodne kovariančne matrike ter tako poskušali povečati stabilnost EKF-a.

Korekcijski del EKF-a je izvršen z minimizacijo razlik med parametri daljic iz lokalnega zemljevida ter parametri daljic iz globalnega zemljevida, ki so transformirani glede na koordinate robota. Za izvršitev korekcijskega dela EKF-a je potrebno ob vsakem posnetku okolja z LRF-om oceniti izhodno kovariančno matriko EKF. Le-ta sestoji iz kovarianc parametrov vseh premic iz trenutnega zemljevida okolja, za katere je bila najdena skladna premica v globalnem zemljevidu. Parametri premice so ocenjeni z metodo navadnih najmanjših kvadratov (LSQ). Zato smo predlagali metodo za ocenjevanje kovarianc dveh parametrov normalne enačbe premice, ki izhaja iz navadnih LSQ. To metodo smo nato v smislu točnosti ter računske zahtevnosti primerjali z metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov premic, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ. Pokazali smo, da je predlagana metoda, ki izhaja iz navadnih LSQ, računsko manj zahtevna. Točnost obeh metod smo analizirali z velikim številom ponovitev poskusov ocenjevanja kovarianc parametrov premic, pri čemer smo uporabili simulirane meritve (točke daljice)

laserskega senzorja razdalj. Točnost predlagane metode, ki izhaja iz navadnih LSQ, je odvisna od števila odbojnih točk iz katerih so izračunani parametri premice. Točnost metode, ki izhaja iz ortogonalnih LSQ, pa je odvisna od točnosti ocen varianc razdalj ter kotov laserskih žarkov, ki morajo biti podane vnaprej.

Analizirali smo tudi kako morebitni popravki meritev LRF-a, ki so popačene zaradi gibanja robota ter končne hitrosti vrtenja zrcala senzorja, vplivajo na korelacijo med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a. Če popravkov ne izvedemo, ohranimo ničelno korelacijo med šumoma. Popačene meritve LRF-a lahko potem v okviru EKF-a vzamemo v obzir z večanjem vnaprej podanih ocen varianc razdalj in kotov laserskih žarkov ter uporabo ortogonalnih LSQ za ocenjevanje parametrov premic ter njihovih kovarianc.

Izvedli smo eksperiment lokalizacije mobilnega robota Pioneer 3-AT v strukturiranem okolju znotraj stavbe. Parameter vhodne kovariančne matrike smo ocenili eksperimentalno. Za nastavitve izhodne kovariančne matrike EKF-a smo uporabili predlagano metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov premic, ki izhaja iz navadnih najmanjših kvadratov. Lego robota ocenjeno z EKF-om smo primerjali z lego robota, ki je ocenjena z originalnim Pioneer 3-AT lokalizacijskim algoritmom. Eksperimentalni rezultati kažejo na primernost nastavitve vhodne kovariančne matrike EKF-a in nakazujejo na uporabnost predlagane metode za ocenjevanje kovarianc parametrov premic za namen lokalizacije mobilnega robota s pomočjo EKF-a.

Namesto simetričnega kinematičnega modela gibanja lahko za predikcijo lege robota Pioneer 3-AT uporabimo tudi asimetrični kinematični model. Dejanske vrednosti nekaterih parametrov asimetričnega modela gibanja so odvisne od podlage, po kateri se pelje robot, od porazdelitve mase robota ter od dinamike gibanja robota. Zato smo podali predlog za sprotno ocenjevanje izbranih dveh parametrov asimetričnega kinematičnega modela. Parametra naj se ocenjujeta s pomočjo EKF-a kot dodatni spremenljivki stanja. Za nadaljnje delo bi bilo torej zanimivo, če bi ta predlog za izboljšavo lokalizacijskega algoritma testirali na mobilnem robotu Pioneer 3-AT.

Na osnovi načrtanega algoritma za lokalizacijo mobilnega robota Pioneer 3-AT smo nakazali rešitev problema SLAM. Prikazali smo strategijo za iskanje skladnih daljic iz lokalnega ter globalnega zemljevida okolja. Prikazana strategija temelji

na binarnem kriteriju oziroma na stopnjah prileganja med lokalno in globalno daljico ter na Mahalanobisovi razdalji med lokalno ter globalno premico. Ko v EKF-SLAM algoritmu dve skladni premici iz globalnega zemljevida združimo v eno premico, na ta način spremenimo korekcijsko oceno stanja. Torej je potrebno na novo izračunati kovariančno matriko korekcije. V našem delu smo zato za ta primer izpeljali nove vrednosti kovariančne matrike korekcijske ocene stanja.

Za nadaljnje delo bi bilo zanimivo nakazano rešitev problema SLAM implementirati in testirati na mobilnem robotu Pioneer 3-AT. Prav tako pa bilo v nadaljnjem delu zanimivo na mesto uveljavljenega pristopa z razširjenim Kalmanovim filtrom uporabiti "Unscented" Kalmanov filter.

8. Prispevki k znanosti

- Načrtali smo algoritem za lokalizacijo mobilnega robota v strukturiranem okolju znotraj stavb na osnovi EKF-a. Načrtan algoritem smo implementirali na mobilnem robotu Pioneer 3-AT, ki je opremljen z merilnikoma hitrosti koles, laserskim senzorjem razdalj ter prenosnim računalnikom. Podali smo analizo vpliva popravkov meritev LRF-a, ki so popačene zaradi gibanja robota ter končne hitrosti vrtenja zrcala senzorja, na korelacijo med šumoma iz predikcijskega ter korekcijskega dela EKF-a. Poleg tega smo podali predlog za sprotno ocenjevanje izbranih dveh parametrov asimetričnega kinematičnega modela gibanja robota, ki naj se ocenjujeta s pomočjo EKF-a kot dodatni spremenljivki stanja. Optimalne vrednosti nekaterih parametrov asimetričnega kinematičnega modela so namreč odvisne od podlage, po kateri se pelje robot, razporeditve mase robota ter dinamike gibanja robota. Na osnovi načrtanega algoritma za lokalizacijo mobilnega robota Pioneer 3-AT smo nakazali tudi rešitev problema SLAM. Ko v EKF-SLAM algoritmu dve skladni premici iz globalnega zemljevida združimo v eno premico, se s tem spremeni korekcijska ocena stanja in posledično je potrebno na novo določiti kovariančno matriko korekcije. Zato smo za ta primer podali izpeljavo za določitev novih vrednosti kovariančne matrike korekcijske ocene stanja.
- Podali smo predlog za eksperimentalno oceno parametra vhodne kovariančne matrike EKF-a, ki zajema negotovosti pri ocenjevanju parametrov kinematičnega modela gibanja robota. Kovariančno matriko smo poskušali oceniti konzervativno ter tako povečati stabilnost EKF-a. Primernost nastavitve vhodne kovariančne matrike EKF-a smo testirali z eksperimentom lokalizacije mobilnega robota Pioneer 3-AT.
- Predlagali smo metodo za ocenjevanje kovarianc parametrov normalne

- enačbe premice, ki izhaja iz navadnih najmanjših kvadratov. Kovariance parametrov premic iz okolja sestavljajo izhodno kovariančno matriko EKF-a. Za ocenjevanje izhodne kovariančne matrike smo uporabili predlagano metodo, ustreznost nastavitve izhodne kovariančne matrike EKF-a pa smo testirali z izvedbo eksperimenta lokalizacije mobilnega robota Pioneer 3-AT.
- Primerjali smo računski zahtevnosti predlagane metode za ocenjevanje kovarianc parametrov premice ter metode, ki izhaja iz ortogonalnih najmanjših kvadratov. Pokazali smo, da je predlagana metoda, ki izhaja iz navadnih najmanjših kvadratov, računsko manj zahtevna. S pomočjo simulacije meritev (točk daljice) laserskega senzorja razdalj pa smo primerjali tudi točnost obeh metod. Pri analizi točnosti ocenjevanja kovarianc parametrov premic smo upoštevali primer, ko negotovosti meritev razdalj ter kotov z LRF-om niso poznane vnaprej, kot tudi idealen primer, ko so poznane resnične negotovosti meritev z LRF-om in so le-te podane vnaprej že pred samim procesom lokalizacije.

Literatura

- [1] Particle filter. dostopno na naslovu: [http://en.wikipedia.org/wiki/Particle filter](http://en.wikipedia.org/wiki/Particle_filter).
- [2] G.C. Anousaki, K.J. Kyriakopoulos. Simultaneous localization and map building of skid-steered robots. *IEEE Robotics and Automation Magazine*, Vol. 14, No. 1, str. 79–89, 2007.
- [3] K. O. Arras, N. Tomatis, B. T. Jensen, R. Siegwart. Multisensor on-the-fly localization: Precision and reliability for applications. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 34, No. 2-3, str. 131–143, 2001.
- [4] Kai O. Arras, José A. Castellanos, Martin Schilt, Roland Siegwart. Feature-based multi-hypothesis localization and tracking using geometric constraints. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 44, No. 1, str. 41–53, 2003.
- [5] K.O. Arras, R.Y. Siegwart. Feature extraction and scene interpretation for map-based navigation and map building. *Proceedings of SPIE, Mobile Robotics XII*, Volume 3210, str. 42–53, 1997.
- [6] T. Bailey, H. Durrant-Whyte. Simultaneous localization and mapping (SLAM): part II. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, Vol. 13, No. 3, str. 108–117, 2006.
- [7] H. Baltzakis, P. Trahanias. Hybrid mobile robot localization using switching state-space models. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02*, str. 366–373, 2002.
- [8] G.A. Borges, M.-J. Aldon. A split-and-merge segmentation algorithm for line extraction in 2-D range images. *Proceedings of the International Conference on Pattern Recognition - Volume 1*, Volume 1, str. 1441, 2000.

-
- [9] G.A. Borges, M.-J. Aldon. Line extraction in 2D range images for mobile robotics. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 40, No. 3, str. 267–297, 2004.
- [10] G.A. Borges, M.-J. Aldon, T. Gil. An optimal pose estimator for map-based mobile robot dynamic localization: experimental comparison with the ekf. *Robotics and Automation, 2001. Proceedings 2001 ICRA. IEEE International Conference on*, Volume 2, str. 1585–1590, 2001.
- [11] M. Bosse, P. Newman, J. Leonard, M. Soika, W. Feiten, S. Teller. An atlas framework for scalable mapping. *Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03. IEEE International Conference on*, Volume 2, str. 1899–1906, 2003.
- [12] Y.-H. Choi, T.-K. Lee, S.-Y. Oh. A line feature based SLAM with low grade range sensors using geometric constraints and active exploration for mobile robot. *Autonomous Robots*, Vol. 24, No. 1, str. 13–27, 2008.
- [13] K. S. Chong, L. Kleeman. Accurate odometry and error modeling for a mobile robot. Tech. rep., Intell. Robot. Res. Centre, Dept. Elect. Comput. Syst. Eng., Monash Univ., Clayton, Australia, 1996.
- [14] K. S. Chong, L. Kleeman. Feature-based mapping in real, large scale environments using an ultrasonic array. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 18, No. 1, str. 3–19, 1999.
- [15] J.L. Crowley, F. Wallner, B. Schiele. Position estimation using principal components of range data. *1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1998. Proceedings*, str. 3121–3128, 1998.
- [16] A. Diosi, L. Kleeman. Laser scan matching in polar coordinates with application to SLAM. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005)*, str. 3317–3322, 2005.
- [17] G. Dudek, M. Jenkin. *Computational principles of mobile robotics*. Cambridge University Press, 2010.

-
- [18] H. Durrant-Whyte. Localisation, mapping and the simultaneous localisation and mapping (SLAM) problem. presentation for the SLAM Summer School 2002.
- [19] H. Durrant-Whyte, T. Bailey. Simultaneous localization and mapping: part I. *IEEE Robotics & Automation Magazine*, Vol. 13, No. 2, str. 99–110, 2006.
- [20] J. Folkesson, H. Christensen. Outdoor exploration and SLAM using a compressed filter. *Proceedings of the 2003 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- [21] J. Forsberg, U. Larsson, P. Ahman, A. Wernersson. The hough transform inside the feedback loop of a mobile robot. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993. Proceedings*, Volume 1, str. 791–798, 1993.
- [22] A. Garulli, A. Giannitrapani, A. Rossi, A. Vicino. Mobile robot SLAM for line-based environment representation. *44th IEEE Conference on Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC '05*, str. 2041–2046, 2005.
- [23] A. Garulli, A. Giannitrapani, A. Rossi, A. Vicino. Simultaneous localization and map building using linear features. *Proceedings of the 2nd European Conference on Mobile Robots*, str. 44–49, 2005.
- [24] B. Giesler, R. Graf, R. Dillmann, C.F.R. Weiman. Fast mapping using the log-hough transformation. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 1998. Proceedings*, Volume 3, str. 1702–1707, 1998.
- [25] J. Guivant, E. Nebot. Improving computational and memory requirements of simultaneous localization and map building algorithms. *Robotics and Automation, 2002. Proceedings. ICRA '02. IEEE International Conference on*, str. 2731–2736, 2002.
- [26] J. E. Guivant, E. M. Nebot. Optimization of the simultaneous localization and map-building algorithm for real-time implementation. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 3, str. 242–257, 2001.

-
- [27] N. Houshangi, F. Azizi. Accurate mobile robot position determination using unscented kalman filter. *Electrical and Computer Engineering. Canadian Conference on*, str. 846–851, 2005.
- [28] K. Hsiao, H. Plinval-Salgues, J. Miller. Particle filters and their applications. presentation, Cognitive robotics, 2005.
- [29] P. Jensfelt, H.I. Christensen. Pose tracking using laser scanning and minimalistic environmental models. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Vol. 17, No. 2, str. 138–147, 2001.
- [30] S. J. Julier. *Process Models for the Navigation of High-Speed Land Vehicles, DPhil thesis*. Doktorska disertacija, Robotics Research Group, University of Oxford, 1997.
- [31] S. J. Julier, J. K. Uhlmann. A new extension of the kalman filter to nonlinear systems. *Int. Symp. Aerospace/Defense Sensing, Simul. and Controls, Orlando, FL*.
- [32] C. Kim, R. Sakthivel, W.K. Chung. Unscented fastslam: A robust and efficient solution to the slam problem. *IEEE Transactions on Robotics*, Vol. 24, No. 4, str. 808–820, 2008.
- [33] G. Klančar, I. škrjanc, L. Teslić. Mobilni robotski sistem za izvidniške, raziskovalne in reševalne namene: končno poročilo. Tehnično poročilo, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2008.
- [34] J. Knight, A. Davison, I. Reid. Towards constant time SLAM using postponement. *Proceedings of the 2001 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2001.
- [35] N.M. Kwok, Q.P. Ha, G. Fang. Data association in bearing-only slam using a cost function-based approach. *Robotics and Automation, 2007 IEEE International Conference on*, str. 4108–4113, 2007.
- [36] L.J. Latecki, R. Lakaemper, X. Sun, D. Wolter. Building polygonal maps from laser range data. *ECAI Int. Cognitive Robotics Workshop, Valencia, Spain, August 2004*, 2004.

-
- [37] A. Mandow, J.L. Martinez, J. Morales, J.L. Blanco, A. Garcia-Cerezo, J. Gonzalez. Experimental kinematics for wheeled skid-steer mobile robots. *Intelligent Robots and Systems, 2007. IROS 2007. IEEE/RSJ International Conference on*, str. 1222–1227, 2007.
- [38] F. Martinelli. Robot localization: comparable performance of ekf and ukf in some interesting indoor settings. *Control and Automation, 16th Mediterranean Conference on*, str. 499–504, 2008.
- [39] J. L. Martinez, A. Mandow, J. Morales, S. Pedraza, A. Garcia-Cerezo. Approximating kinematics for tracked mobile robots. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 24, No. 10, str. 867–878, 2005.
- [40] D. Matko. *Računalniško vodenje procesov*. Ljubljana: Fakulteta za elektrotehniko in računalništvo, 1995.
- [41] R. Mazl, L. Preucil. Building a 2d environment map from laser range-finder data. *Proceedings of the IEEE Intelligent Vehicles Symposium, 2000*, 2000.
- [42] J. M. M. Montiel, L. Montano. Efficient validation of matching hypotheses using mahalanobis distance. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, Vol. 11, No. 3, str. 439 – 448, 1998.
- [43] J. Neira, J.D. Tardos. Data association in stochastic mapping using the joint compatibility test. *Robotics and Automation, IEEE Transactions on*, Vol. 17, No. 6, str. 890 –897, 2001.
- [44] V. Nguyen, S. Gächter, A. Martinelli, N. Tomatis, R. Siegwart. A comparison of line extraction algorithms using 2D range data for indoor mobile robotics. *Autonomous Robots*, Vol. 23, No. 2, str. 97–111, 2007.
- [45] V. Nguyen, A. Martinelli, N. Tomatis, R. Siegwart. A comparison of line extraction algorithms using 2D laser rangefinder for indoor mobile robotics. *2005 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2005. (IROS 2005)*, str. 1929–1934, 2005.
- [46] S.T. Pfister, S.I. Roumeliotis, J.W. Burdick. Weighted line fitting algorithms for mobile robot map building and efficient data representation. *IEEE*

-
- International Conference on Robotics and Automation, 2003. Proceedings. ICRA '03*, Volume 1, str. 1304–1311, 2003.
- [47] T. Rofer. Using histogram correlation to create consistent laser scan maps. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and System, 2002*, Volume 1, str. 625–630, 2002.
- [48] B. Schiele, J. L. Crowley. A comparison of position estimation techniques using occupancy grids. *IEEE Conference on Robotics and Autonomous Systems, 1994. (ICRA 94)*, 1994.
- [49] SICK. *Technical description, LMS200/211/221/291 Laser Measurement Systems*.
- [50] J. D. Tardós, J. Neira, P. M. Newman, J. J. Leonard. Robust mapping and localization in indoor environments using sonar data. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 21, No. 4, str. 311–330, 2002.
- [51] L. Teslic. *Simulacija mapiranja okolja z mobilnim robotom in laserskim sensorjem oddaljenosti*. diplomsko delo, Fakulteta za elektrotehniko, Univerza v Ljubljani, 2006.
- [52] S. Thrun. Robotic mapping: A survey. G. Lakemeyer, B. Nebel, uredniki, *Exploring Artificial Intelligence in the New Millenium*. Morgan Kaufmann, 2002.
- [53] S. Thrun, Y. Liu, D. Koller, A.Y. Ng, Z. Ghahramani, H. Durrant-Whyte. Simultaneous localization and mapping with sparse extended information filters. *The International Journal of Robotics Research*, Vol. 23, No. 7-8, str. 693–716, 2004.
- [54] N. Tomatis, I. Nourbakhsh, R. Siegwart. Hybrid simultaneous localization and map building: a natural integration of topological and metric. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 44, No. 1, str. 3–14, 2003.
- [55] M. Veeck, W. Veeck. Learning polyline maps from range scan data acquired with mobile robots. *2004 IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems, 2004. (IROS 2004). Proceedings*, Volume 2, str. 1065–1070, 2004.

-
- [56] M. Walter, R. Eustice, J. Leonard. A provably consistent method for imposing sparsity in feature-based slam information filters. *in Proc. Int. Symp. Robotics Research*, 2005.
- [57] E.A. Wan, R. Van Der Merwe. The unscented kalman filter for nonlinear estimation. *Adaptive Systems for Signal Processing, Communications, and Control Symposium 2000. AS-SPCC. The IEEE 2000*, str. 153–158, 2000.
- [58] Z. Wang, S. Huang, G. Dissanayake. Implementation issues and experimental evaluation of d-slam. *Proceedings 5th International Conference on Field Robotics (FSR) 2005*, str. 155–166, 2005.
- [59] P. Weckesser, R. Dillmann. Modeling unknown environments with a mobile robot. *Robotics and Autonomous Systems*, Vol. 23, No. 4, str. 293–300, 1998.
- [60] P. Weckesser, R. Dillmann, U. Rembold. Sensor-fusion of intensity- and laser range-images. *Multisensor Fusion and Integration for Intelligent Systems, 1996. IEEE/SICE/RSJ International Conference on*, str. 501–508, 1996.
- [61] P. Weckesser, R. Dillmann, U. Rembold. Navigating a mobile service-robot in a natural environment using sensor-fusion techniques. *Intelligent Robots and Systems, 1997. IROS '97., Proceedings of the 1997 IEEE/RSJ International Conference on*, Volume 3, str. 1423–1428, 1997.
- [62] J.W. Weingarten, G. Gruener, R. Siegwart. Probabilistic plane fitting in 3D and an application to robotic mapping. *IEEE International Conference on Robotics and Automation, 2004. Proceedings. ICRA '04*, Volume 1, str. 927–932, 2004.
- [63] S. B. Williams. *Efficient solutions to autonomous mapping and navigation problems, DPhil thesis*. Doktorska disertacija, Univ. Sydney, Australian Ctr. Field Robotics, 2001.
- [64] Zhuang Yan, Tang Shubo, Liu Lei, Wang Wei. Mobile robot indoor map building and pose tracking using laser scanning. *International Conference on Intelligent Mechatronics and Automation, 2004. Proceedings*, str. 656–661, 2004.

- [65] T. Yaqub, M.J. Tordon, J. Katupitiya. Line segment based scan matching for concurrent mapping and localization of a mobile robot. *9th International Conference on Control, Automation, Robotics and Vision, 2006. (ICARCV '06)*, str. 1–6, 2006.
- [66] S. Yoon, S-K. Park, H. D. Choi, S. Kim, Y. K. Kwak. Vision-based outdoor simultaneous localization and map building using compressed extended kalman filter. *Proceedings of the European Control Conference 2007, Kos, Greece, 2007*.
- [67] X. Zhang, A. B. Rad, Y.-K. Wong. A robust regression model for simultaneous localization and mapping in autonomous mobile robot. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, Vol. 53, No. 2, str. 183–202, 2008.

Izjava

Izjavljam, da sem doktorsko disertacijo izdelal samostojno pod vodstvom mentorja prof. dr. Igorja Škrjanca, univ. dipl. inž. el.. Izkazano pomoč drugih sodelavcev sem v celoti navedel v zahvali.

Luka Teslić